МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВПО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Учебно-методическое пособие для студентов
педагогического отделения
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

КАЗАНЬ - 2013

УДК 510.023 (075.8)
ББК 22.1я73
З91

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

*учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Протокол №1 от 4 октября 2012 г.*

*заседания кафедры теории и технологий преподавания
математики и информатики
Протокол №3 от 8 октября 2012 г.*

Составители:
канд. пед. наук, доц. Е.Р. Садыкова;
канд. пед. наук, доц. О.В. Разумова

Научный редактор –
канд. пед. наук, доц. К.Б. Шакирова

Рецензент
канд. пед. наук, доц. Е.Е. Лаврентьева

Нестандартные методы решения тригонометрических неравенств: Учебно-методическое пособие / Е.Р. Садыкова, О.В. Разумова. – Казань: Казан. ун-т, 2013. – 69 с.

Данное пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Элементарная математика», а также курс по выбору «Нестандартные задачи по элементарной математике». Оно содержит справочный материал, содержащий необходимые формулы и теоретические сведения по тригонометрии, классификацию нестандартных методов решения тригонометрических неравенств с разбором конкретных примеров, а также задачи для самостоятельной работы.

I. СПРАВОЧНИК

В справочнике приводятся определения, свойства и формулы, наиболее важные при решении математических задач по разделу «Тригонометрия».

Окружность (круг) радиуса 1 с центром в начале координат называется *единичной окружностью (тригонометрическим кругом).*

Если точка P_α единичной окружности (рис.1) получена при повороте точки P_0 (1; 0) на угол α, то ордината точки P_α – *синус* угла α (обозначается $\sin\alpha$), а абсцисса – *косинус* угла α (обозначается $\cos\alpha$). *Тангенсом* угла α называется отношение $\sin\alpha$ к $\cos\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. *Котангенсом* угла α называется отношение $\cos\alpha$ к $\sin\alpha$: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

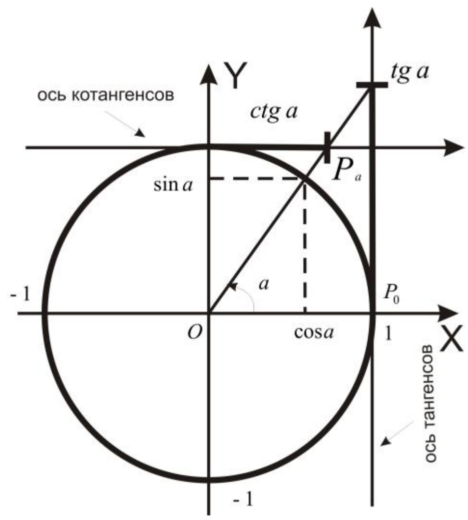


Рис.1

Величина, обратная $\cos\alpha$, называется *секансом,* а обратная $\sin\alpha$ – *косекансом* угла α; они обозначаются $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$.

Отрезок $[-1;1]$ оси ординат называют *линией синусов*; отрезок $[-1;1]$ оси абсцисс – *линией косинусов;* прямую $x = 1$ – *осью (линией) тангенсов;* прямую $y = 1$ – *осью (линией) котангенсов.*

Числовые функции, заданные формулами $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$, где x – величина угла в радианах, называют соответственно *синусом, косинусом, тангенсом, котангенсом, секансом* и *косекансом.* Под аргументом тригонометрических функций понимается угол, измеряемый в градусах или радианах или просто число.

Угол в *один радиан* равен центральному углу окружности, длина дуги которого равна радиусу этой окружности.

$1\ \textit{рад} \approx 57°17'$

Формулы перевода градусной меры в радианную и обратно

$\alpha = \dfrac{\pi \cdot a°}{180°}$; $a° = \dfrac{\alpha \cdot 180°}{\pi}$, где α – радианная мера угла, $a°$ – градусная.

Знаки значений тригонометрических функций в различных четвертях

Четверть	Угол $(n \in Z)$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
I	$\alpha \in \left(2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$	+	+	+	+
II	$\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$	+	-	-	-
III	$\alpha \in \left(\pi + 2\pi n; \dfrac{3}{2}\pi + 2\pi n\right)$	-	-	+	+
IV	$\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right)$	-	+	-	-

Таблица значений тригонометрических функций основных углов

Угол в градусах	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270
Угол в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не сущ.

$\mathrm{ctg}\,\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	не сущ.	0

Простейшие тригонометрические тождества

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ *(основное тригонометрическое тождество)*

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ \text{где}\ \alpha\neq\frac{\pi(2k+1)}{2}$$

$$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1,\ \text{где}\ \alpha\neq\frac{\pi k}{2}$$

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\ \text{где}\ \alpha\neq\pi k$$

В формулах $k\in\mathbf{Z}$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\qquad\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Формулы суммы и разности двух углов (формулы сложения)

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\qquad\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\qquad\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}\qquad\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}\qquad\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta}$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{2}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha}\qquad\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\alpha}=\frac{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha}{2}$$

Формулы тройного аргумента

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\qquad\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha} \qquad \mathrm{ctg}3\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^3\alpha - 3\mathrm{ctg}\alpha}{3\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\ \alpha \neq \pi(2k+1) \qquad \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}},\ \alpha \neq 2\pi k$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \pi k \qquad \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \pi k$$

Во всех формулах $k \in Z$

Формулы универсальной тригонометрической подстановки

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

где $t = \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ \alpha \neq \pi(2k+1),\ k \in Z$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму (или разность)

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$$

Формулы преобразования суммы и разности в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$

Формулы преобразования суммы и разности тангенсов и котангенсов

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-2\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=-2\operatorname{ctg}2\alpha$$

Формулы приведения

$$\cos(\pi n\pm\alpha)=\pm(-1)^n\cos\alpha$$

$$\sin(\pi n\pm\alpha)=\pm(-1)^n\sin\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\pm\alpha\right)=\mp(-1)^n\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi \mathrm{n}\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\pi \mathrm{n}\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi \mathrm{n}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi \mathrm{n}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha$$

Полезные тождества

$$\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\sin(60^\circ-\alpha)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha$$

$$\cos\alpha\cdot\cos(60^\circ-\alpha)\cdot\cos(60^\circ-\alpha)=\frac{1}{4}\cos 3\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}(60^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(60^\circ-\alpha)=\operatorname{ctg}3\alpha$$

Функции острого угла и прямоугольный треугольник

В прямоугольном треугольнике с острым углом α (рис.2) справедливы следующие соотношения: *синус* угла α равен отношению катета, противолежащего этому углу, к гипотенузе: $\sin\alpha = \frac{b}{c}$; *косинус* угла α равен отношению прилежащего катета к гипотенузе: $\cos\alpha = \frac{a}{c}$; *тангенс* угла α равен отношению противолежащего катета к прилежащему: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$; *котангенс* угла α равен отношению прилежащего катета к противолежащему: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}$.

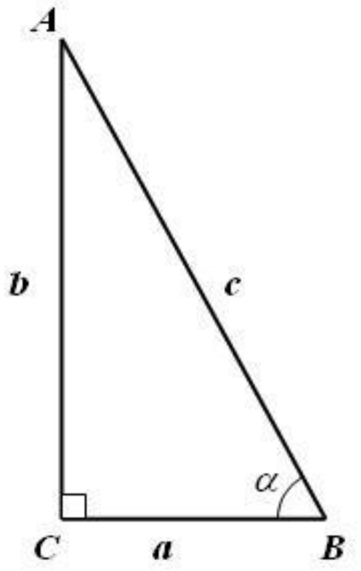


Рис.2

Преобразование выражения вида $a\sin x + b\cos x$

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\varphi + x)$, где φ определяется из условий

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

При $a, b > 0$ $\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

Частные случаи:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

Множество значений выражения $a\sin x + b\cos x$

$$-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin x + b\cos x \le \sqrt{a^2+b^2}.$$

Обратные тригонометрические функции

Арксинусом числа a называется такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен α (рис.3).

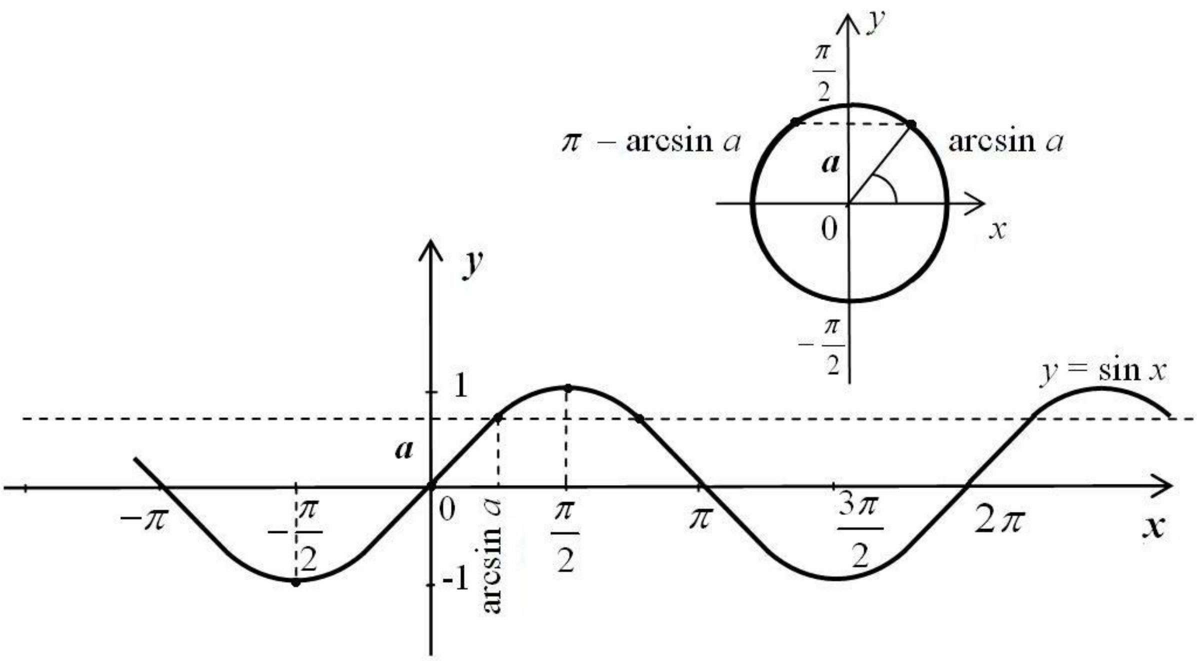


Рис.3

$y = \arcsin x$ – функция, определенная на отрезке $[-1;1]$, обратная функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Таким образом, $y = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}, \\ \sin y = x \end{cases}$

Примечание. Название возникло от латинского *arccus* – дуга. Соответственно, $\arcsin a$ – дуга, синус которой равен a.

Арккосинусом числа a называется такое число из отрезка $[0;\pi]$, косинус которого равен a (рис.4).

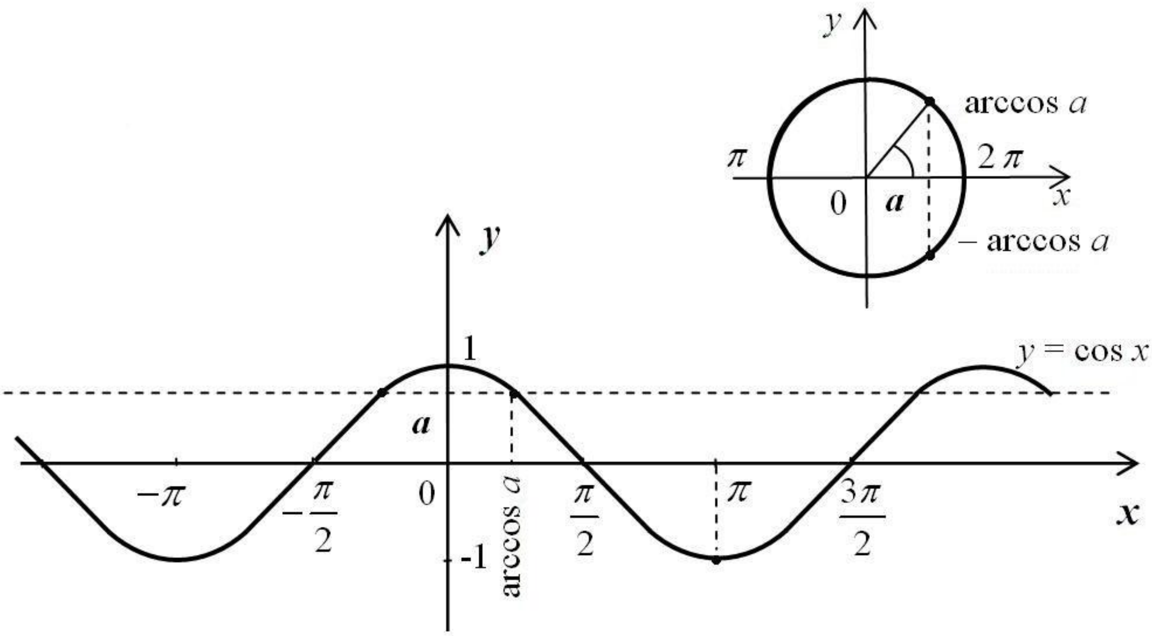


Рис.4

$y = \arccos x$ – функция, определенная на отрезке $[-1;1]$, обратная функции $y = \cos x$, $x \in [0;\pi]$. Таким образом, $y = \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y \le \pi, \\ \cos y = x \end{cases}$.

Арктангенсом числа a называется такое число из интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a (рис.5).

$y = \operatorname{arctg} x$ – функция, определенная при всех $x \in (-\infty;\infty)$, обратная функции $y = \operatorname{tg} x$, $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, т.е. $y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} y = x \end{cases}$

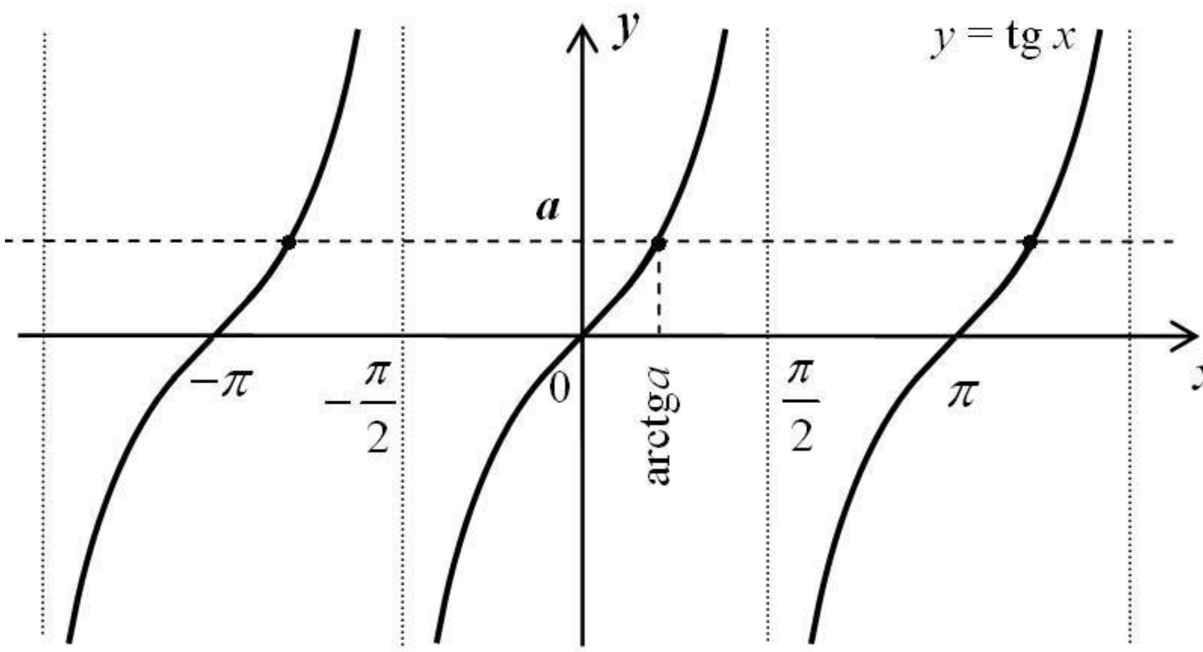


Рис.5

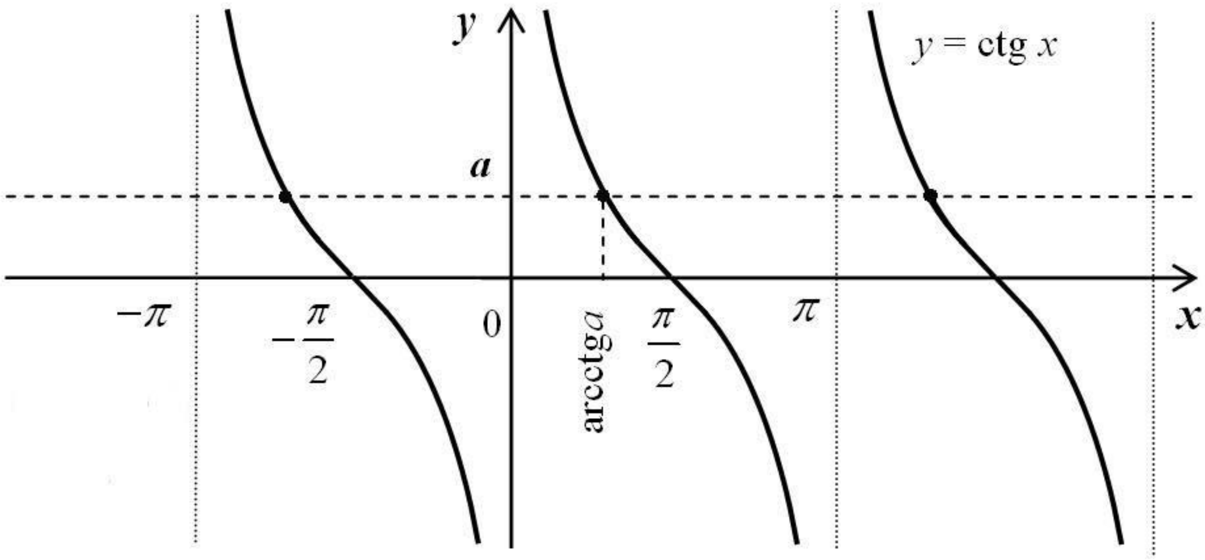


Рис.6

Арккотангенсом числа a называется такое число из интервала $(0;\pi)$, котангенс которого равен a (рис.6).

$y = \operatorname{arcctg} x$ – функция, определенная при всех $x \in (-\infty;\infty)$, обратная функции $y = \operatorname{ctg} x$, т.е. $y = \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < y < \pi, \\ \operatorname{ctg} y = x \end{cases}$.

Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ называются *обратными тригонометрическими функциями*. Из данных определений следует, что

$\sin(\arcsin a) = a$, если $|a| \le 1$; $\arcsin(\sin t) = t$, если $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$\cos(\arccos a) = a$, если $|a| \le 1$; $\arccos(\cos t) = t$, если $t \in [0; \pi]$;

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$, для любого $a \in R$; $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) = t$, если $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$, для любого $a \in R$; $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} t) = t$, если $t \in (0; \pi)$.

α	$0°$ 0	$15°$ $\frac{\pi}{12}$	$18°$ $\frac{\pi}{10}$	$30°$ $\frac{\pi}{6}$	$36°$ $\frac{\pi}{5}$	$45°$ $\frac{\pi}{4}$	$54°$ $\frac{3\pi}{10}$	$60°$ $\frac{\pi}{3}$	$75°$ $\frac{5\pi}{12}$	$90°$ $\frac{\pi}{2}$	$120°$ $\frac{2\pi}{3}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	1	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$2+\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	1	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$2-\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

α	$135°$ $\frac{3\pi}{4}$	$150°$ $\frac{5\pi}{6}$	$180°$ π	$210°$ $\frac{7\pi}{6}$	$225°$ $\frac{5\pi}{4}$	$240°$ $\frac{4\pi}{3}$	$270°$ $\frac{3\pi}{2}$	$300°$ $\frac{5\pi}{3}$	$315°$ $\frac{7\pi}{4}$	$330°$ $\frac{11\pi}{6}$	$360°$ 2π
$\sin\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg}\alpha$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	-1	$-\sqrt{3}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$-\sqrt{3}$	–

1.2. Тригонометрические функции, их графики и свойства

1. $y = \sin x$

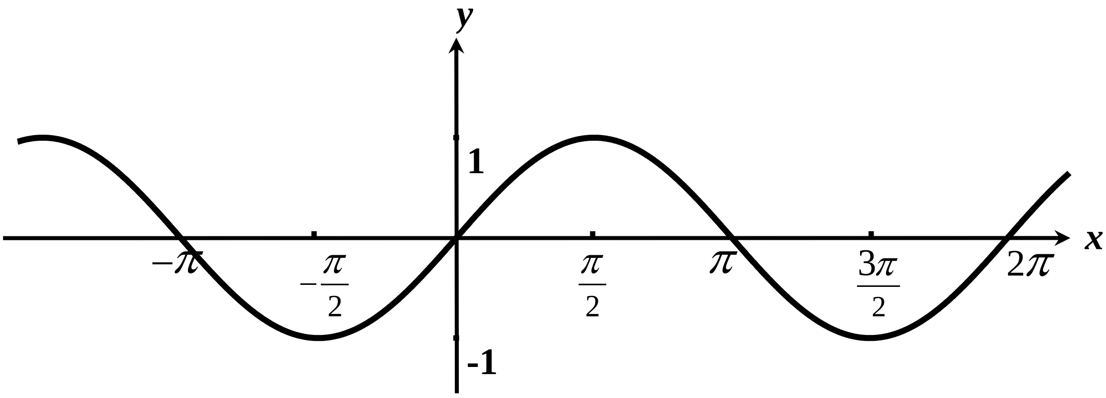


Рис.7

2.

$y = \cos x$

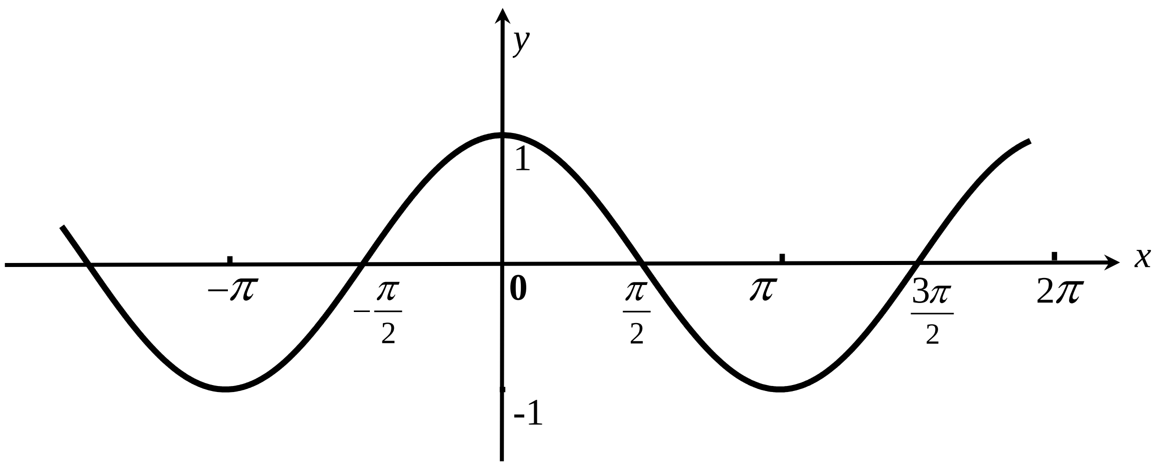


Рис.8

3. $y = \operatorname{tg} x$

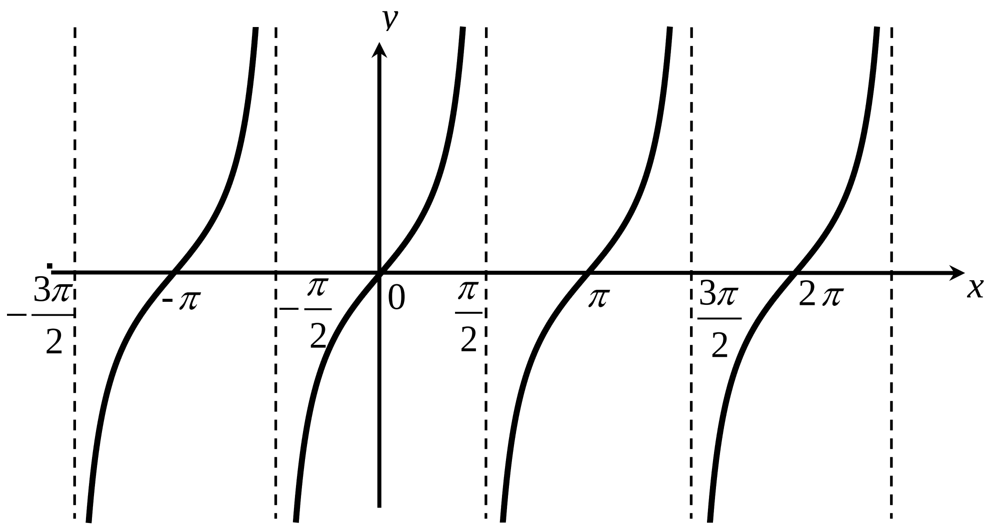


Рис.9

4. $y = \operatorname{ctg} x$

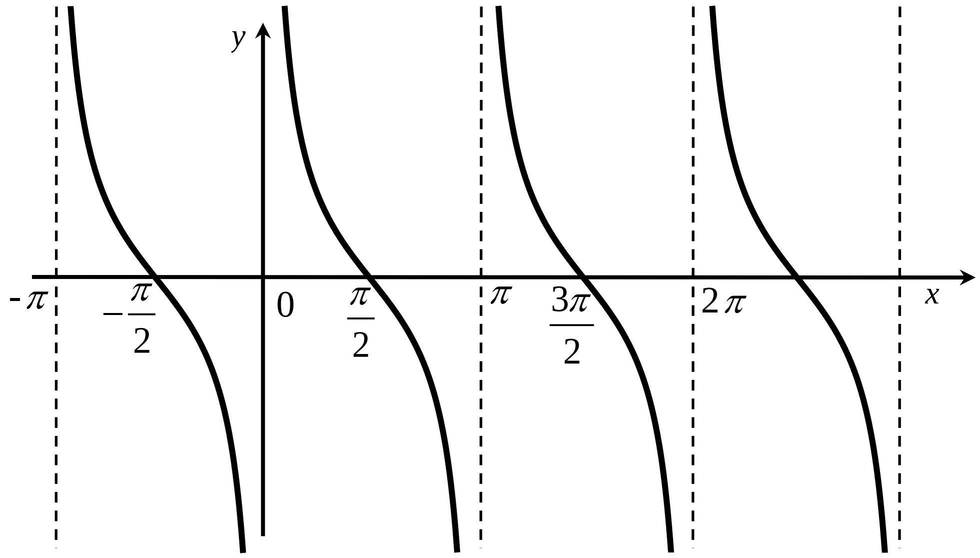


Рис.10

Свойства тригонометрических функций

	Функция			
	$f(x) = \sin x$	$f(x) = \cos x$	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f(x) = \operatorname{ctg} x$
1. Область определения	R	R	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	$(\pi n; \pi + \pi n)$
2. Область значений	$[-1;1]$	$[-1;1]$	R	R
3. Четность (нечетность)	нечетная	четная	нечетная	нечетная
4. Наименьший положительный период	2π	2π	π	π

5. Координаты точек пересечения графика f с осью Ox	$(\pi n;0)$	$\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;0\right)$	$(\pi n;0)$	$\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;0\right)$
6. Координаты точек пересечения графика f с осью Oy	$(0;0)$	$(0;1)$	$(0;0)$	нет
7. Промежутки, на которых $f(x)>0$	$(2\pi n;\pi+2\pi n)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$	$\left(\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$	$\left(\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$
8. Промежутки, на которых $f(x)<0$	$(-\pi+2\pi n;2\pi n)$	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi n\right)$
9. Промежутки возрастания	$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$	$[-\pi+2\pi n;2\pi n]$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$	нет
10. Промежутки убывания	$\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$	$[2\pi n;\pi+2\pi n]$	нет	$(\pi n;\pi+\pi n)$
11. Точки минимума	$-\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$\pi+2\pi n$	нет	нет
12. Минимумы функции	-1	-1	нет	нет
13. Точки максимума	$\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$2\pi n$	нет	нет
14. Максимумы функции	1	1	нет	нет

Всюду предполагается, что $n\in Z$.

1.3. Решение неравенств вида $\sin x>a$, $\sin x<a$, $\cos x>a$, $\cos x<a$

В тригонометрических неравенствах аргументы тригонометрических функций рассматриваются не как углы или дуги, а как действительные числа. Подобные задачи бывают двух типов:

а) решить неравенство;

б) доказать тригонометрическое неравенство.

Решение тригонометрических неравенств. Основная часть тригонометрических неравенств решается сведением их к решению простейших ($\sin x>a$, $\sin x<a$, $\cos x>a$, $\cos x<a$, $\operatorname{tg} x>0$ и т.д.). Это может быть метод разложения на множители; замены переменного ($t = \cos x$, $u = \sin x$ и т.д.), где сначала решается обычное неравенство, а затем неравенство вида $t_1 \le \sin x \le t_2$ и т.д., или другие способы.

Пусть $f(x)$ – одна из основных тригонометрических функций. Для решения неравенства $f(x) > a$ достаточно найти его решение на одном периоде, т.е. на любом отрезке, длина которого равна периоду функции $f(x)$. Тогда решением исходного неравенства будут все найденные x, а также те значения, которые отличаются от найденных на любое целое число периодов функции. При этом удобно использовать графический метод.

Графическая интерпретация решений неравенств вида

$\sin x > a$, $\sin x \ge a$, $\sin x < a$, $\sin x \le a$ $\cos x > a$, $\cos x \ge a$, $\cos x < a$, $\cos x \le a$

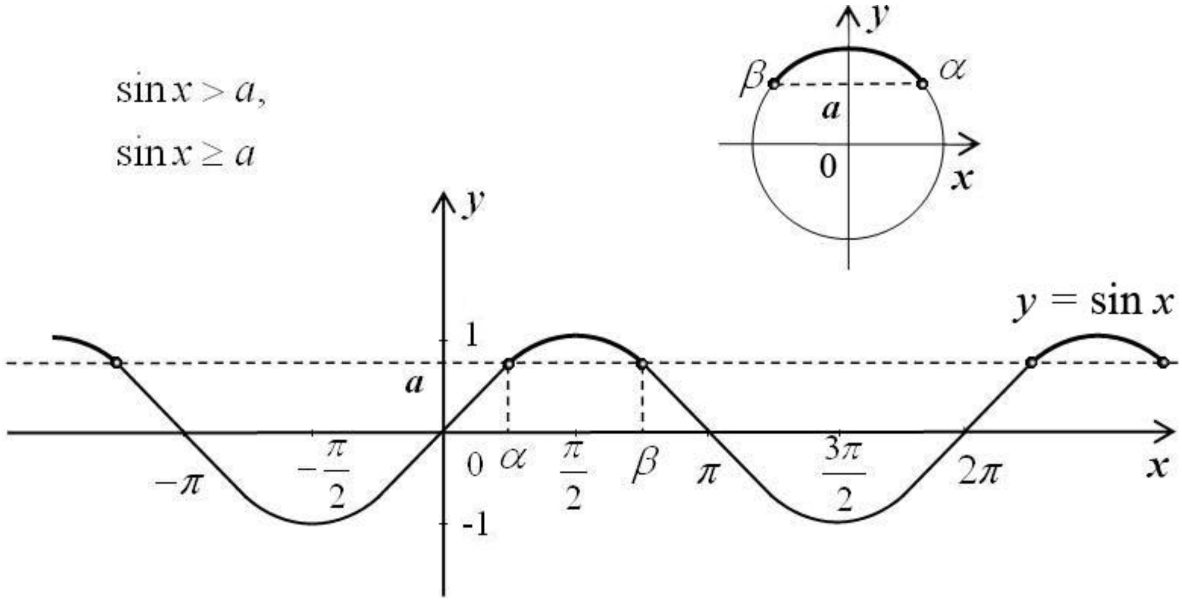

$\sin x > a,$
$\sin x \geq a$
y
β
α
a
0
x
$y = \sin x$
1
a
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
α
$\frac{\pi}{2}$
β
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
-1
x

Рис.11

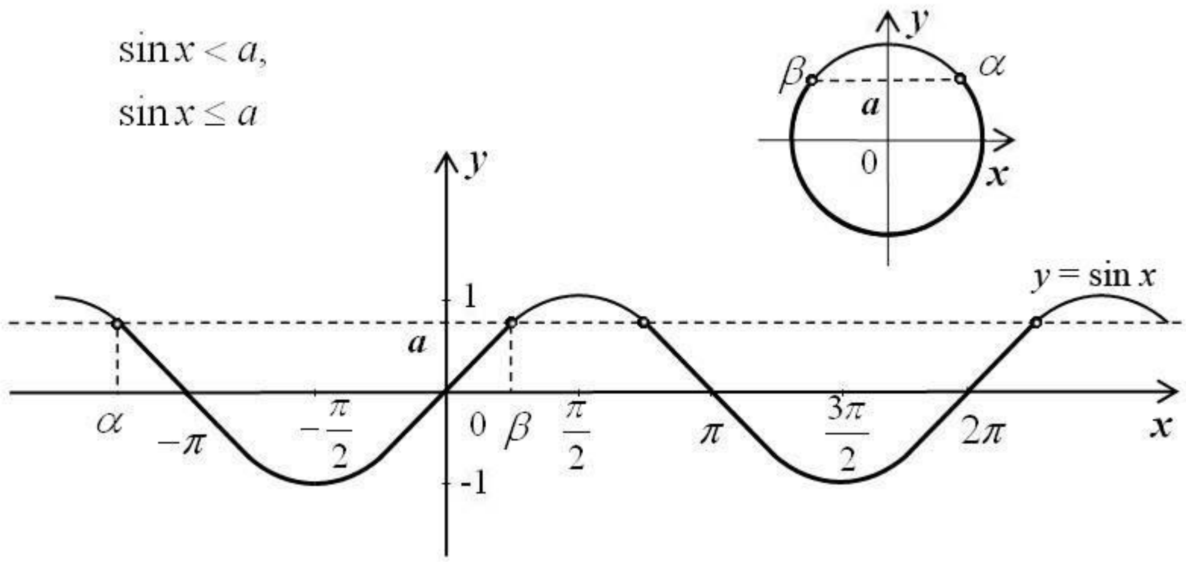

$\sin x < a,$
$\sin x \leq a$
y
β
α
a
0
x
$y = \sin x$
1
a
α
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
β
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
-1
x

Рис.12

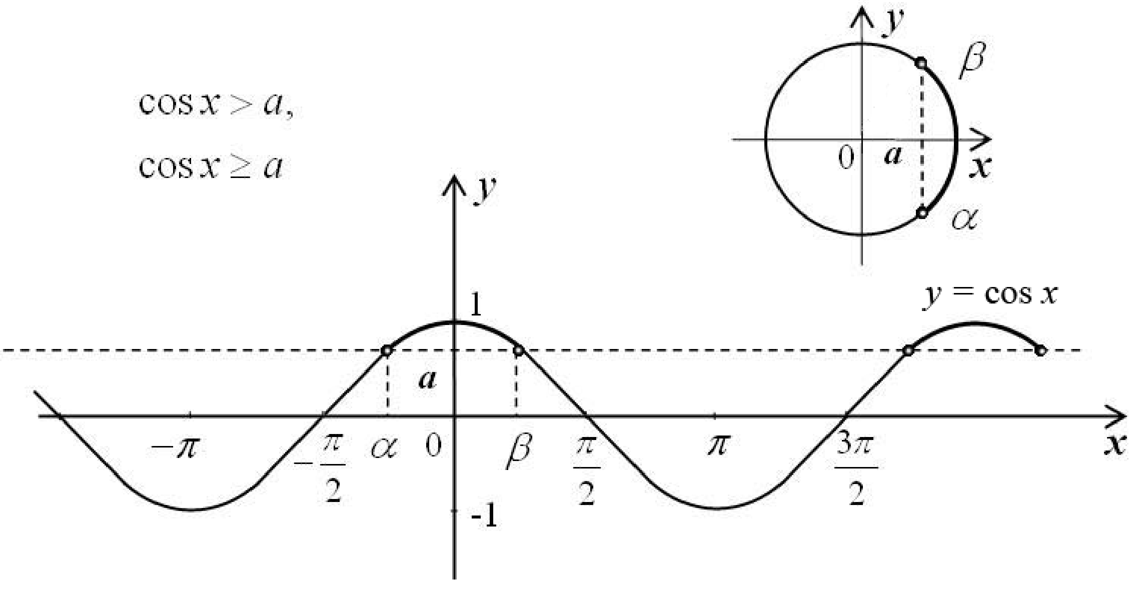


Рис.13

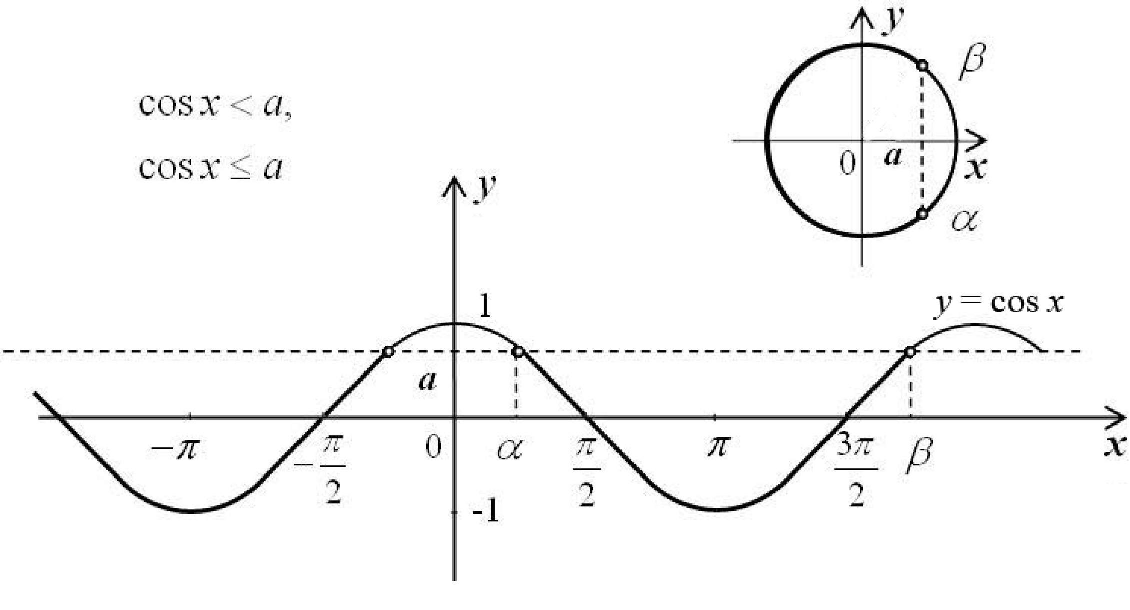


Рис.14

Решения простейших тригонометрических неравенств вида

$$\sin x > a,\ \sin x \geq a,\ \sin x < a,\ \sin x \leq a$$

$$|a| < 1$$

$$\sin x > a \Leftrightarrow \arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n$$

$$\sin x \geq a \Leftrightarrow \arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi n$$

$$\sin x < a \Leftrightarrow -\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n$$

$$\sin x \le a \Leftrightarrow -\pi - \arcsin a + 2\pi n \le x \le \arcsin a + 2\pi n$$

$a = -1$	$a = 1$
$\sin x < -1$ – решений нет	$\sin x < 1 \Leftrightarrow x \ne \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$
$\sin x \le -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$	$\sin x \le 1 \Leftrightarrow x \in R$
$\sin x > -1 \Leftrightarrow x \ne -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$	$\sin x > 1$ – решений нет
$\sin x \ge -1 \Leftrightarrow x \in R$	$\sin x \ge 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$
$a < -1$	$a > 1$
$\sin x < a$ – решений нет	$\sin x < a \Leftrightarrow x \in R$
$\sin x \le a$ – решений нет	$\sin x \le a \Leftrightarrow x \in R$
$\sin x > a \Leftrightarrow x \in R$	$\sin x > a$ – решений нет
$\sin x \ge a \Leftrightarrow x \in R$	$\sin x \ge a$ – решений нет

Во всех формулах $n \in Z$

Решения простейших тригонометрических неравенств вида

$\cos x > a$, $\cos x \ge a$, $\cos x < a$, $\cos x \le a$

$$|a| < 1$$

$$\cos x > a \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n$$

$$\cos x \ge a \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi n \le x \le \arccos a + 2\pi n$$

$$\cos x < a \Leftrightarrow \arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n$$

$$\cos x \le a \Leftrightarrow \arccos a + 2\pi n \le x \le 2\pi - \arccos a + 2\pi n$$

$a = -1$	$a = 1$
$\cos x < -1$ – решений нет	$\cos x < 1 \Leftrightarrow x \ne 2\pi n$
$\cos x \le -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n$	$\cos x \le 1 \Leftrightarrow x \in R$
$\cos x > -1 \Leftrightarrow x \ne \pi + 2\pi n$	$\cos x > 1$ – решений нет
$\cos x \ge -1 \Leftrightarrow x \in R$	$\cos x \ge 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n$
$a < -1$	$a > 1$

$\cos x < a$, $\cos x \le a$ – решений нет

$\cos x > a, \cos x \ge a \Leftrightarrow x \in R$

$\cos x < a, \cos x \le a \Leftrightarrow x \in R$

$\cos x > a$, $\cos x \ge a$ – решений нет

Во всех формулах $n \in Z$

1.4. Решение неравенств вида $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{ctg} x > a$, $\operatorname{ctg} x < a$

Решение простейших неравенств вида

$\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x \ge a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x \le a$

$\operatorname{tg} x > a$

$$arctga + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$\operatorname{tg} x < a$

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < arctga + \pi n$$

$\operatorname{tg} x \ge a$

$$arctga + \pi n \le x \le \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$\operatorname{tg} x \le a$

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n \le x \le arctga + \pi n$$

Во всех формулах $n \in Z$

Графическая интерпретация решений неравенств вида

$\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x \ge a$

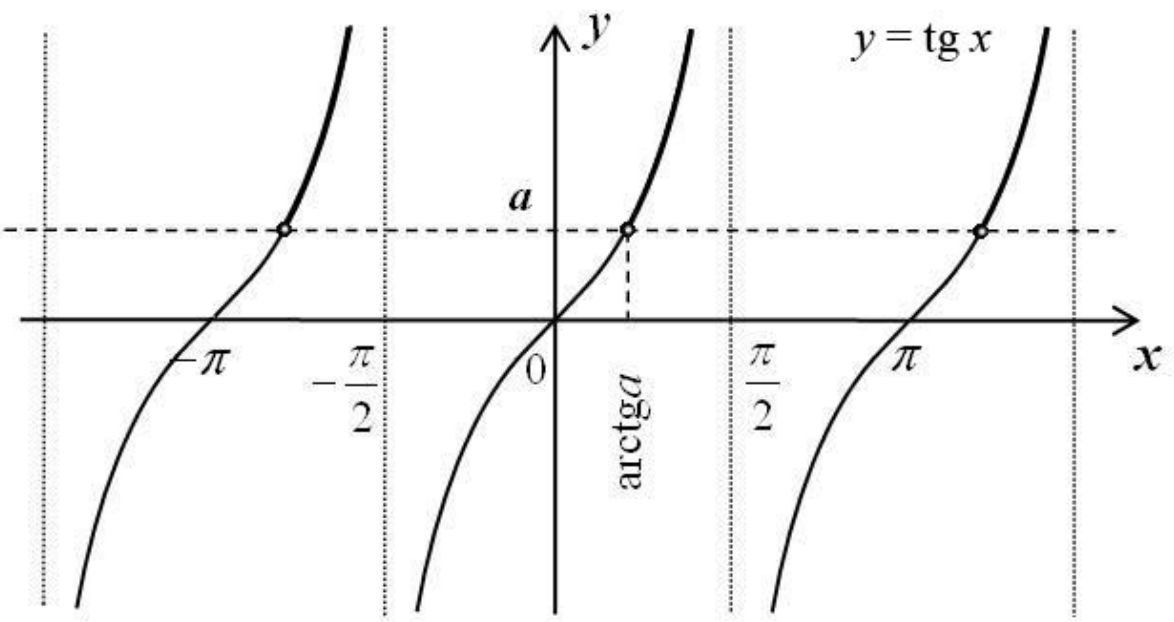


Рис.15

Графическая интерпретация решений неравенств вида

$\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x \le a$

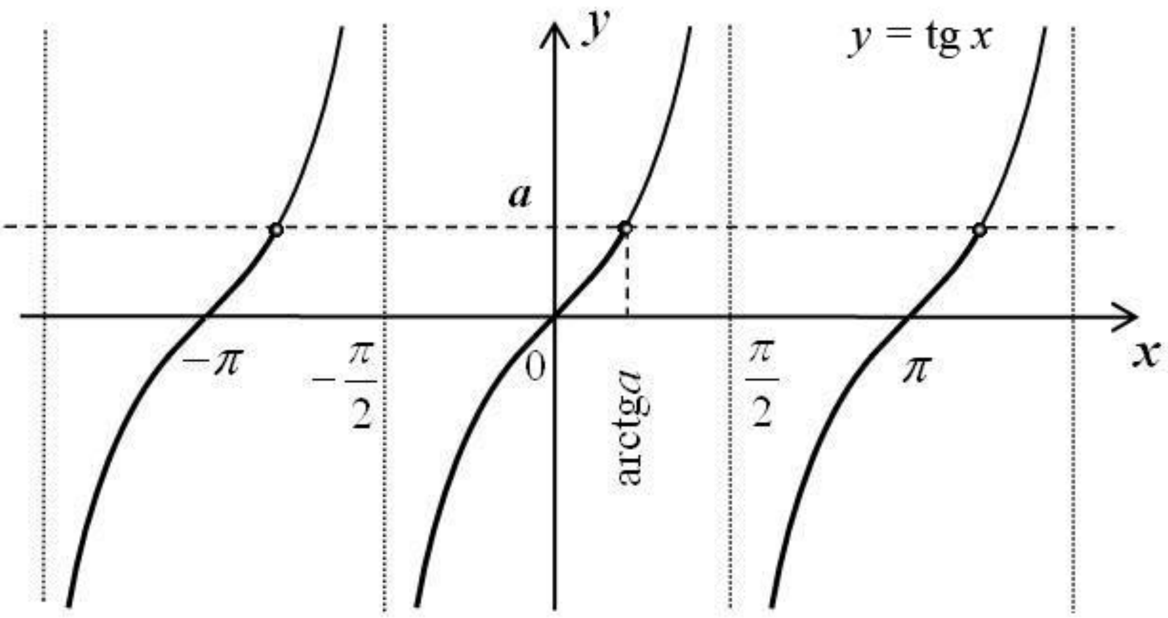


Рис.16

Решение простейших неравенств вида

$\operatorname{ctg} x > a$, $\operatorname{ctg} x \ge a$, $\operatorname{ctg} x < a$, $\operatorname{ctg} x \le a$

$\operatorname{ctg} x > a$	$\operatorname{ctg} x < a$
$\pi n < x < arcctga + \pi n$	$arcctga + \pi n < x < \pi + \pi n$
$\operatorname{ctg} x \ge a$	$\operatorname{ctg} x \le a$
$\pi n \le x \le arcctga + \pi n$	$arcctga + \pi n \le x \le \pi + \pi n$

Во всех формулах $n \in Z$

Графическая интерпретация решений неравенств вида

$\operatorname{ctg} x > a$, $\operatorname{ctg} x \geq a$, $\operatorname{ctg} x < a$, $\operatorname{ctg} x \leq a$

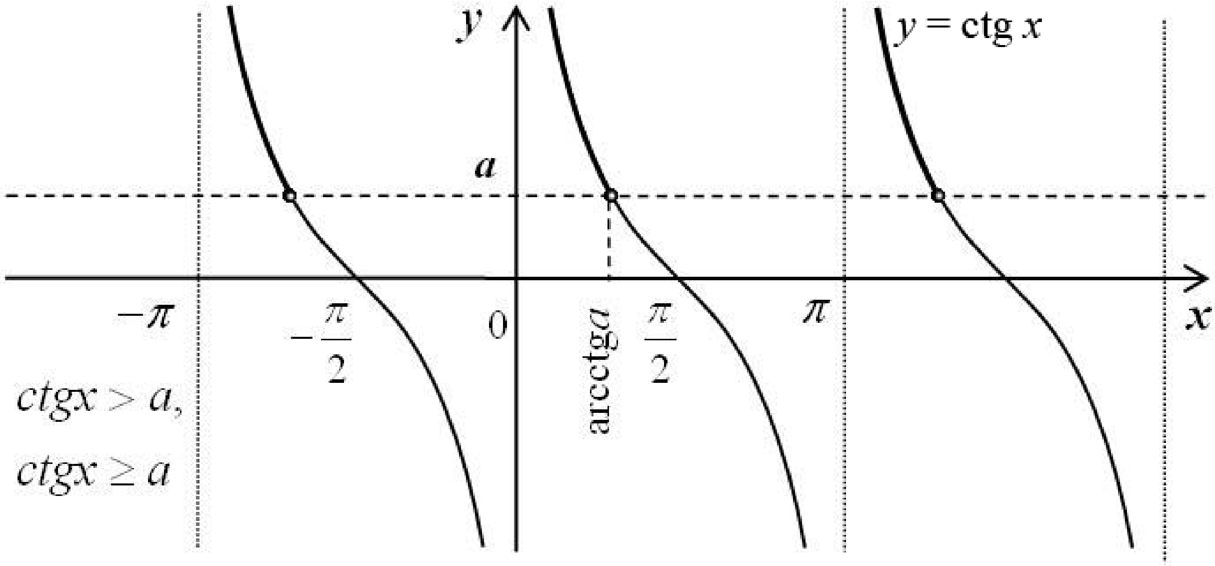


Рис.17

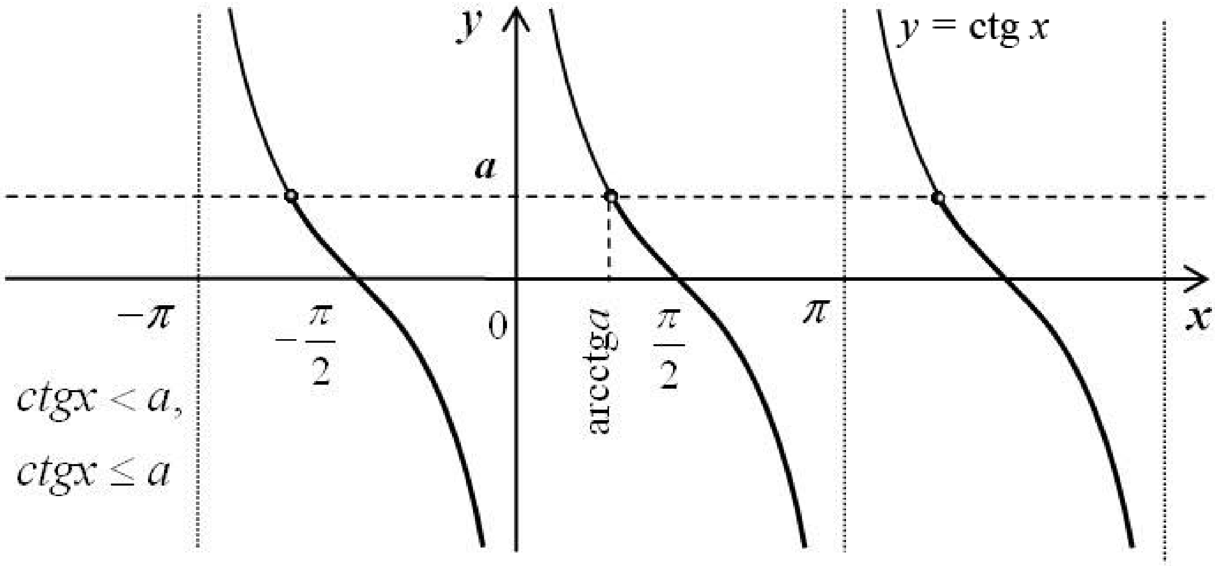


Рис.18

Примеры решений простейших тригонометрических неравенств

Пример 1. Решим неравенство $\sin x \geq -\frac{1}{2}$.

Все точки P_x единичной окружности при значениях x, удовлетворяющих данному неравенству, имеют ординату большую или равную $-\frac{1}{2}$ (рис.19). Множество всех таких точек – дуга l. Найдем условие принадлежности точки P_x этой дуге.

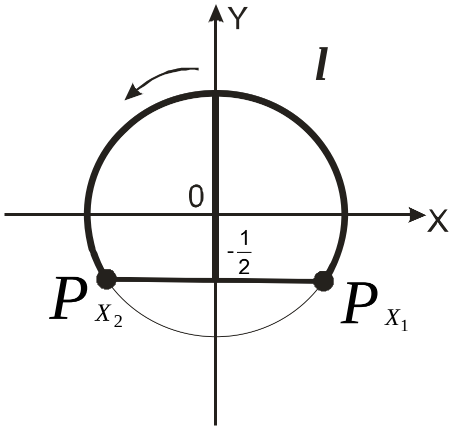


Рис.19

Точка P_{x_1} лежит на правой полуокружности, ордината P_{x_1} равна $-\frac{1}{2}$, и, следовательно, в качестве x_1 удобно взять значение $x_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$. Представим себе, что мы совершаем обход дуги l от точки P_{x_1} к P_{x_2} против часовой стрелки. Тогда $x_2 > x_1$, и, как легко понять, $x_2 = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7\pi}{6}$. Таким образом, получаем, что точка P_x принадлежит дуге l, если $-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{7\pi}{6}$. Решения неравенства, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ длиной 2π таковы: $-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{7\pi}{6}$. Вследствие периодичности синуса остальные решения получаются добавлением к найденным, чисел вида $2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le x \le \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Пример 2. Решим неравенство $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Все точки P_x единичной окружности при значениях x, удовлетворяющих данному неравенству, имеют ординату меньшую $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис.20). Множество всех таких точек – дуга l. Концы ее P_{x_1} и P_{x_2} не входят в рассматриваемое множество, поскольку их ординаты не меньше, а равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Чтобы найти условие, при котором P_x принадлежит указанному множеству, найдем x_1 и x_2.

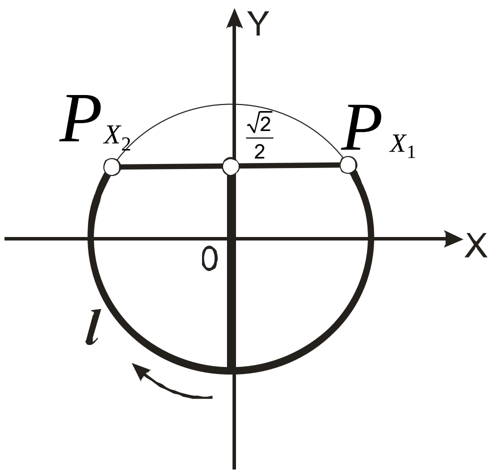


Рис.20

Возьмем $x_1 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. Рассмотрим обход дуги l от точки P_{x_1} к P_{x_2} в направлении по часовой стрелке; $x_2 < x_1$, и $x_2 = -\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{5\pi}{4}$. Все решения неравенства из промежутка $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ длиной 2π таковы: $-\frac{5\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$. Учитывая периодичность синуса, получаем:

$$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Пример 3. $\sin x > \frac{1}{2}$.

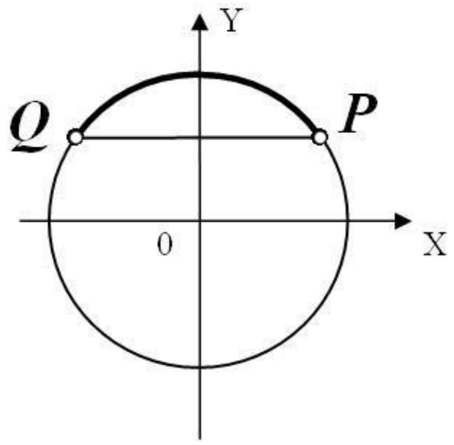


Рис.21

Решение: Для начала выясним, какие точки на тригонометрической окружности соответствуют решениям неравенства. Это – точки, ордината которых больше $\frac{1}{2}$, и на окружности они заполняют дугу PQ, отмеченную на рис.21.

Теперь можно записать множество чисел, соответствующих точкам на дуге PQ. Ясно, что это множество содержит интервал $\left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$ ($\frac{\pi}{6}$ соответствует точке P, $\frac{5\pi}{6}$ – точке Q), а вообще наше множество состоит из всех интервалов $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, где k – целое: ведь если точке на тригонометрической окружности соответствует число x, то ей же соответствуют и все числа вида $x+2\pi k$ ($k \in Z$).

Ответ к неравенству можно записать так:

$\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$ ($k \in Z$) или еще проще: $\frac{\pi}{6}+2\pi k < x < \frac{5\pi}{6}+2\pi k$.

Пример 4. $\sin x \le \frac{1}{3}$.

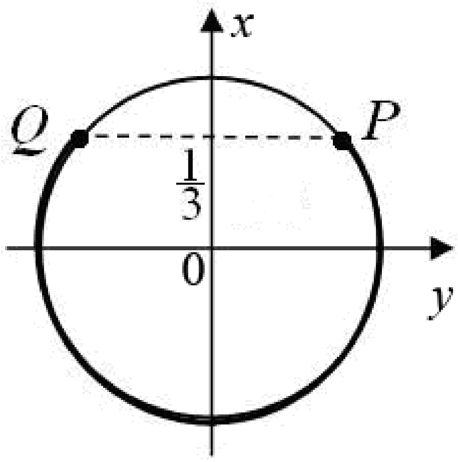


Рис.22

Решение: На тригонометрической окружности множество решений неравенства изобразится дугой PQ, отмеченной на рис.22. Нам нужно выбрать на числовой оси какой-нибудь отрезок, соответствующий этой дуге, и тогда останется только прибавить к его границам $2\pi n$. Выберем какое-нибудь число, соответствующее одному из концов дуги. Очевидно, точке P соответствует $\arcsin\frac{1}{3}$. Раз это число выбрано, выбор числа, соответствующего другому концу, уже предопределен. Чтобы найти это число, надо сдвинуться из точки $\arcsin\frac{1}{3}$ на числовой оси в отрицательном направлении на расстояние, равное длине дуги PQ. Точке O на окружности соответствует ноль, точке B – число $-\pi$, а точке Q – число, расположенное еще на $\arcsin\frac{1}{3}$ левее, то есть $-\pi - \arcsin\frac{1}{3}$. Стало быть, один из отрезков, соответствующих дуге PQ, будет $\left[-\pi - \arcsin\frac{1}{3}; \arcsin\frac{1}{3}\right]$, а ответом к неравенству $\sin x \le \frac{1}{3}$ будет объединение отрезков $\left[-\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k; \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k\right]$ ($k \in Z$).

Тот же ответ можно представить иначе:

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k\right]\cup\left[\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right].$$

Пример 5. $\operatorname{tg} x \le -\frac{3}{4}$.

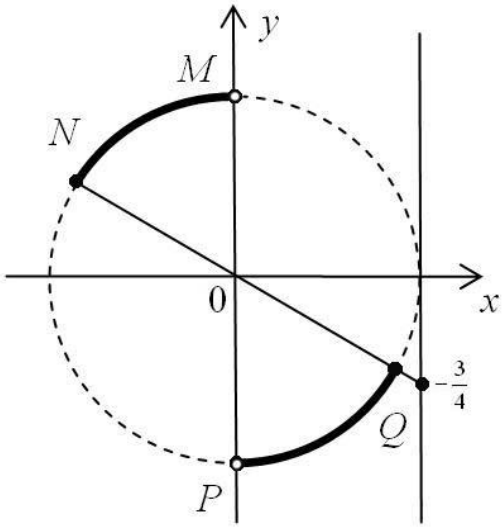


Рис.23

Решение: Используя ось тангенсов, легко убедиться, что на тригонометрической окружности решения неравенства изображаются двумя дугами, отмеченными на рис.23. Дуге PQ соответствует интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$, а дуге MN – интервал $\left(\frac{\pi}{2};\pi+\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$. Второй из этих интервалов получается из первого сдвигом на π, так что ясно, что ответ к неравенству – это объединение интервалов $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi n\right)$ ($n\in Z$).

При решении простейших тригонометрических неравенств можно также пользоваться не тригонометрическим кругом, а графиками. Например, чтобы решить то же неравенство $\sin x \le \frac{1}{3}$, достаточно отметить на числовой оси такие точки, что лежащие над ними точки графика $y = \sin x$ имеют ординату не более $\dfrac{1}{3}$ (рис.24). По этому рисунку легко записать ответ.

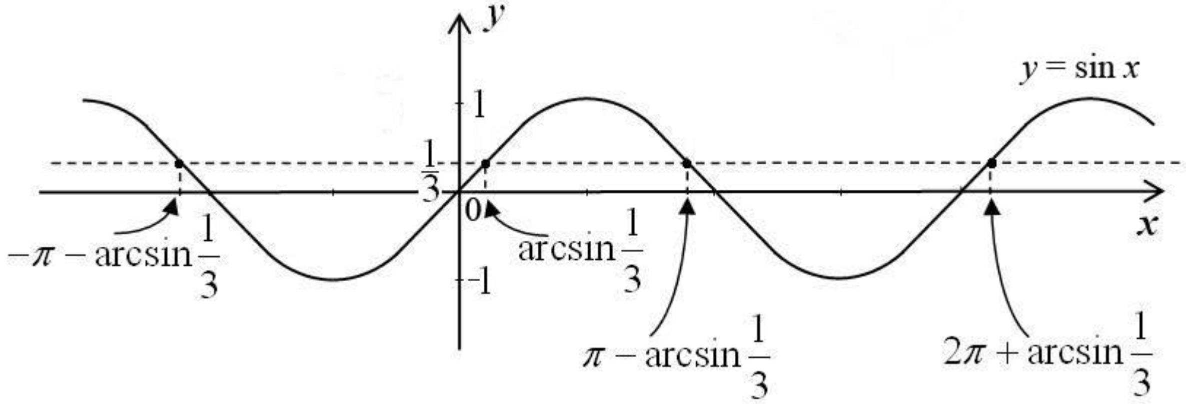


Рис.24

Пример 6. Решим неравенство $\cos x < \dfrac{1}{2}$.

Множество точек единичной окружности, абсциссы которых меньше $\dfrac{1}{2}$, лежат левее прямой $x = \dfrac{1}{2}$ (рис.25). Значит, множество всех таких точек есть дуга l (концы ее P_{x_1} и P_{x_2} не входят в это множество). Находим x_1 и x_2. Точка $P_{x_1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow t_1 = \arccos\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$. При переходе от точки P_{x_1} к P_{x_2} по дуге l выполняется обход против движения часовой стрелки, тогда $t_2 > t_1$ и $t_2 = 2\pi - \arccos\dfrac{1}{2} = \dfrac{5\pi}{3}$. Точка принадлежит выделенной дуге l, при условии $\dfrac{\pi}{3} < t < \dfrac{5\pi}{3}$.

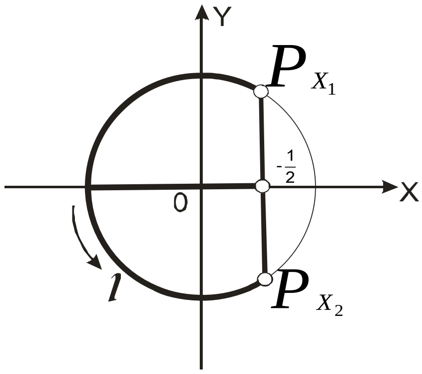


Рис.25

Решения неравенства, принадлежащие промежутку $[0;2\pi]$ длиной 2π таковы: $\frac{\pi}{3} < t < \frac{5\pi}{3}$. Вследствие периодичности косинуса остальные решения получаются добавлением к найденным, чисел вида $2\pi n$, $n \in Z$ $\Rightarrow$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Пример 7. Решим неравенство $\operatorname{tg} x \le 1$.

Период тангенса равен π. Поэтому найдем сначала все решения данного неравенства, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, а затем воспользуемся периодичностью тангенса. Для выделения всех точек P_x правой полуокружности, значения x которых удовлетворяют данному неравенству, обратимся к линии тангенсов. Если x является решением неравенства, то ордината точки T, равная $\operatorname{tg} x$, должна быть меньше или равна 1. Множество таких точек T – луч AT. Множество точек P_x, соответствующих точкам этого луча – дуга l, выделенная на рис.26. (Точка P_{x_1} принадлежит, а $P_{-\frac{\pi}{2}}$ не принадлежит рассматриваемому множеству).

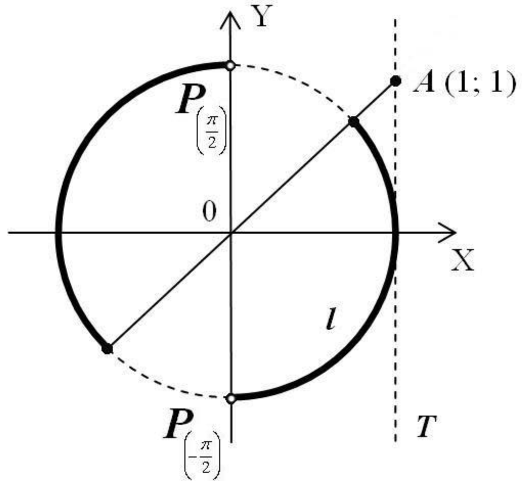


Рис.26

Находим условие, при котором точка P_{x_1} принадлежит дуге l. $x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, и $\operatorname{tg} x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Значит, x должно удовлетворять условию $-\frac{\pi}{2} < t \le \frac{\pi}{4}$. Все решения данного неравенства, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, таковы: $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$. Учитывая периодичность тангенса, получаем: $-\frac{\pi}{2}+\pi n < x \le \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in Z$.

Пример 8. Решим неравенство $\cos 2x \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Обозначим $2x$ через t, получим $\cos t \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Выделим соответствующую дугу l (рис.27).

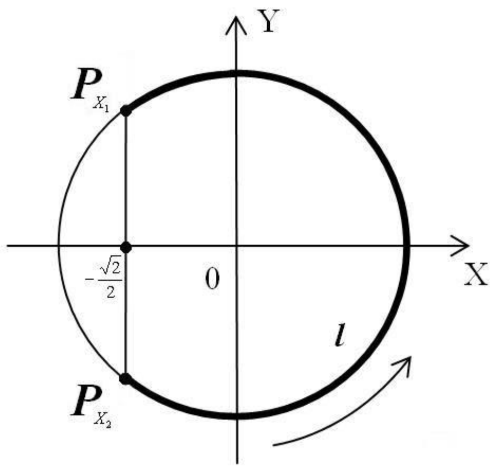


Рис.27

Находим $t_1 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, $t_2 = -\frac{3\pi}{4}$, откуда

$$-\frac{3\pi}{4}+2\pi n \le t \le \frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n \in Z.$$

Переходя к переменной x, получаем:

$$-\frac{3\pi}{4}+2\pi n \le 2x \le \frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n \in Z.$$

$$-\frac{3\pi}{8}+\pi n \le x \le \frac{3\pi}{8}+\pi n,\ n \in Z.$$

Пример 9. Решим неравенство $3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)<\sqrt{3}$.

Преобразовав данное неравенство, получим:

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)<\frac{\sqrt{3}}{3}$, $-\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)<\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)>-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Обозначим $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}$ через t, тогда $\operatorname{tg} t>-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Выделим соответствующую дугу l на единичной окружности (рис.28).

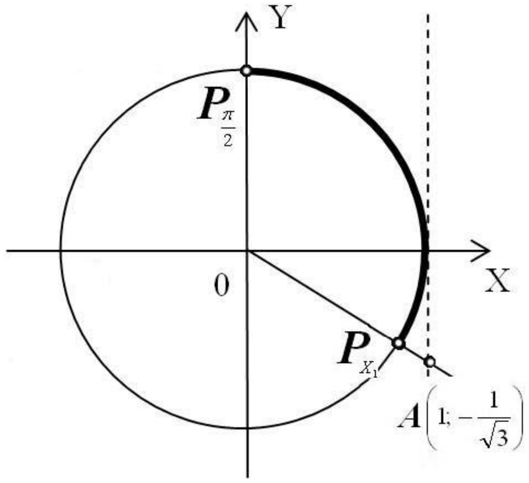


Рис.28

Так как $t_1=\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$, получаем $-\frac{\pi}{6}+\pi n<t<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$.

Перейдем к переменной x: $-\frac{\pi}{6}+\pi n<\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$,

$\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

1.5 Решение простейших неравенств, используя период функции

Если функция $F(x)$ периодическая и имеет период T, то функция

$A \cdot F(kx + b)$, где A, $k \neq 0$ и b постоянны, также периодична, причем ее период равен $\dfrac{T}{|k|}$.

Для нахождения периода T тригонометрической функции y, состоящей из суммы простейших тригонометрических функций, надо: 1) найти периоды функций-слагаемых; 2) привести их к общему знаменателю; 3) найти наименьшее общее кратное числителей; 4) разделить его на общий знаменатель.

Пример 1. Найти период функции $y = \sin 3x + \cos 5x$.

Решение. $T_1 = \dfrac{2\pi}{3}$; $T_2 = \dfrac{2\pi}{5}$;

$$T_1 = \frac{10\pi}{15}; \quad T_2 = \frac{6\pi}{15}.$$

$\text{НОК}(10\pi; 6\pi) = 30\pi$; $T = \dfrac{30\pi}{15} = 2\pi$.

Ответ: $T = 2\pi$.

Пример 2. Найти период функции $y = 15\sin^2 12x + 12\sin^2 15x$.

Решение. Сводим функцию к сумме простейших:

$$y = 15 \cdot \frac{1 - \cos 24x}{2} + 12 \cdot \frac{1 - \cos 30x}{2}; \quad y = 13{,}5 - 7{,}5\cos 24x - 6\cos 30x;$$

$$T_1 = \frac{\pi}{12}; \quad T_2 = \frac{\pi}{15};$$

$$T_1 = \frac{5\pi}{60}; \quad T_2 = \frac{4\pi}{60}.$$

$\text{НОК}(5\pi; 4\pi) = 20\pi$; $T = \dfrac{20\pi}{60} = \dfrac{\pi}{3}$.

Ответ: $T = \dfrac{\pi}{3}$.

Решения простейших тригонометрических неравенств вида $\sin x > a$, $\sin x \geq a$, $\sin x < a$, $\sin x \leq a$

Пример 3. Решить неравенство $\sin\dfrac{x}{2} \geq -\dfrac{1}{2}$.

Решение. $F(x)=\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\geq 0;\quad T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

Найдем нули функции: $\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=0; \sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2};$

$\frac{x}{2}=(-1)^n+\frac{\pi}{6}+\pi n;\ x=(-1)^n+\frac{\pi}{3}+2\pi n$.

Нули функции для n, равного – 1; 0; 1, отмечаем на числовой оси (рис.29).

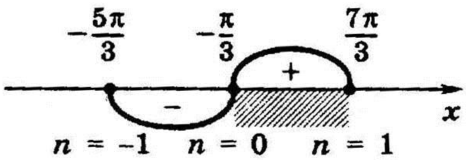


Рис.29

На $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right]$ $F(x)\geq 0;$ проводим линию знаков. Учитывая период функции, равный 4π , записываем ответ.

Ответ: $F(x)\geq 0$ на $\left[-\frac{\pi}{3}+4\pi n;\frac{7\pi}{3}+4\pi n\right]$.

Решения простейших тригонометрических неравенств вида

$\cos x>a$, $\cos x\geq a$, $\cos x<a$, $\cos x\leq a$

Пример 4. Решить неравенство $|\sin x|\geq\frac{1}{2}$.

Решение. $\sqrt{\sin^2 x}\geq\frac{1}{2};\sin^2 x\geq\frac{1}{4};\frac{1-\cos 2x}{2}\geq\frac{1}{4};1-\cos 2x\geq\frac{1}{2};$

$\cos 2x\leq\frac{1}{2};\quad F(x)=\cos 2x-\frac{1}{2}\leq 0;\quad T=\frac{2\pi}{2}=\pi.$

Найдем нули функции:

$\cos 2x-\frac{1}{2}=0;\cos 2x=\frac{1}{2};\ 2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$.

Нули функции для n со значениями 0 и 1 отмечаем на числовой оси (рис.30).

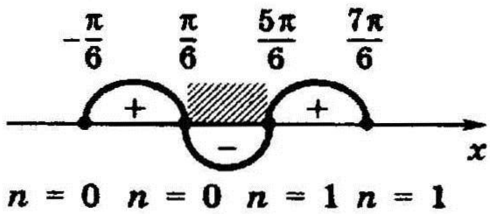


Рис.30

На $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$ $F(x)\geq 0;$ проводим линию знаков. $F(x)\leq 0$ на $\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$. Учитывая период функции, равный π, записываем ответ.

Ответ: $F(x)\leq 0$ на $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right]$.

Решение простейших неравенств вида

$\operatorname{tg} x > a$**,** $\operatorname{tg} x \geq a$**,** $\operatorname{tg} x < a$**,** $\operatorname{tg} x \leq a$

Данные неравенства обычно решаются на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, а затем к найденным решениям прибавляется целое число периодов функции. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ существует единственный корень уравнения $tgx = a$, поэтому достаточно найти нуль функции для $n = 0$.

Пример 5. Решить неравенство $3tg\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)<\sqrt{3}.$

Решение.

$$tg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)>-\frac{\sqrt{3}}{3};\quad F(x)=tg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}>0;\quad T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi.$$

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{6}<\frac{x}{2}<\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}.$$

Найдем нули функции: $tg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}=0; tg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3};$

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+\pi n;\ x=\frac{\pi}{3}+2\pi n.$$

На $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$ $F(x)<0$ (рис.31); проводим линию знаков. $F(x)>0$ на $\left(\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right)$. Учитывая период функции, равный 2π, записываем ответ.

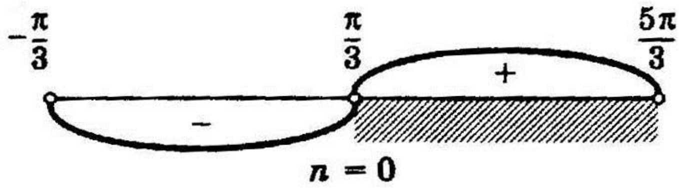


Рис.31

Ответ: $F(x)>0$ на $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$.

Решение простейших неравенств вида

$\operatorname{ctg} x>a$, $\operatorname{ctg} x\geq a$, $\operatorname{ctg} x<a$, $\operatorname{ctg} x\leq a$

Данные неравенства решаются на интервале $(0;\pi)$, а затем к найденным решениям прибавляется целое число периодов функции. На интервале $(0;\pi)$ существует единственный корень уравнения $ctgx=a$, поэтому достаточно найти нуль функции для $n=0$.

Пример 6. Решить неравенство $3ctg\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\leq\sqrt{3}.$

Решение.

$$F(x)=3ctg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\leq 0;\quad T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi.$$

$$0<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}<\pi;-\frac{\pi}{6}<\frac{x}{2}<\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}.$$

Найдем нули функции:

$$3ctg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}=0;\,ctg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+\pi n;\,\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+\pi n;\,x=\frac{\pi}{3}+2\pi n.$$

На $\left(-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$ $F(x)\geq 0$ (рис.32); проводим линию знаков. $F(x)\leq 0$ на $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3}\right)$. Учитывая период функции, равный 2π, записываем ответ.

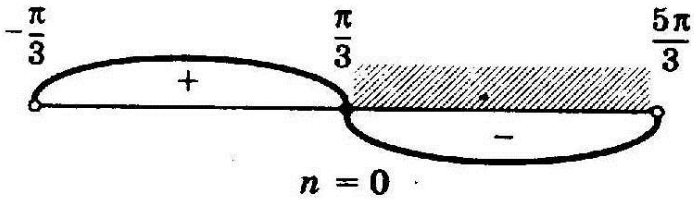


Рис.32

Ответ: $F(x)\leq 0$ на $\left[\dfrac{\pi}{3}+2\pi n;\dfrac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$.

II. НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

2.1 Графический метод решения тригонометрических неравенств

На практике довольно часто оказывается полезным графический метод решения неравенств. Рассмотрим сущность метода на конкретных примерах.

Пример 1. Решить неравенство: $\cos x - 3x + 1 \geq 0$.

Решение: При решении неравенств графическим методом необходимо как можно более точно построить графики функций. Преобразуем данное неравенство к виду:

$$\cos x \geq 3x - 1.$$

Построим в одной системе координат графики функций $y = \cos x$ и $y = 3x - 1$ (рис.33).

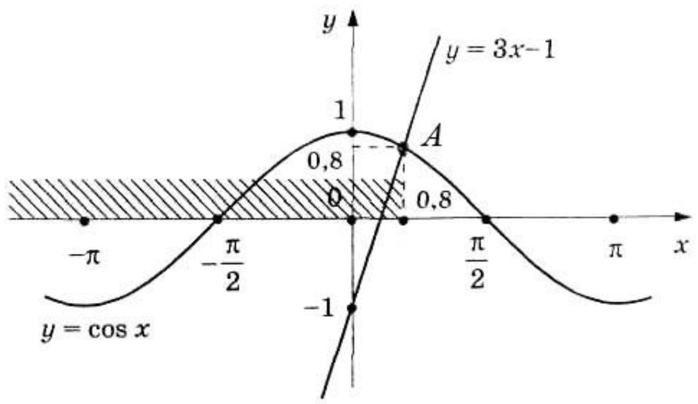


Рис.33

Графики функций пересекаются в точке A с координатами $x \approx 0{,}6$; $y \approx 0{,}8$. На промежутке $(-\infty; 0{,}6)$ точки графика $y = 3x - 1$ ниже точек графика $y = \cos x$. А при $x \approx 0{,}6$ значения функций совпадают. Поэтому $\cos x \geq 3x - 1$ при $x \leq 0{,}6$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0{,}6]$.

Пример 2. Решить неравенство: $\sin x < 2x - 1$.

Решение: Построим в одной системе координат графики функций $y = \sin x$ и $y = 2x - 1$ (рис.34).

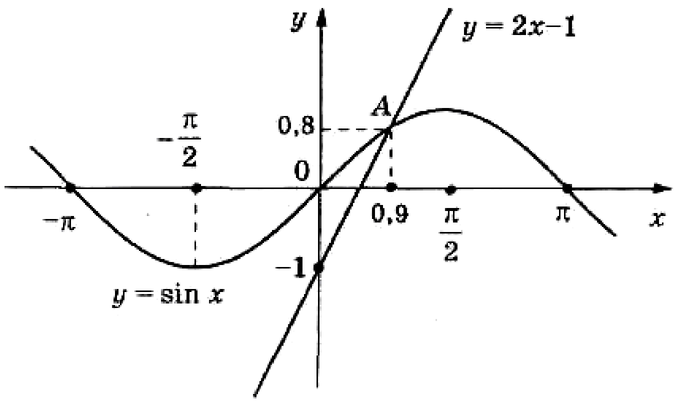


Рис.34

Графики функций пересекаются в точке $A(x \approx 0{,}9; y \approx 0{,}8)$. На промежутке $(0{,}9;\infty)$ точки графика $y = 2x - 1$ выше точек графика $y = \sin x$. Значит $\sin x < 2x - 1$ при $x > 0{,}9$.

Ответ: $x \in (0{,}9;+\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство: $\cos x - x^2 - 2x - 1 \geq 0$.

Решение: Преобразуем данное неравенство к виду:

$$\cos x \geq x^2 + 2x + 1.$$

Построим в одной системе координат графики функций $y = \cos x$ и $y = x^2 + 2x + 1$ (рис.35).

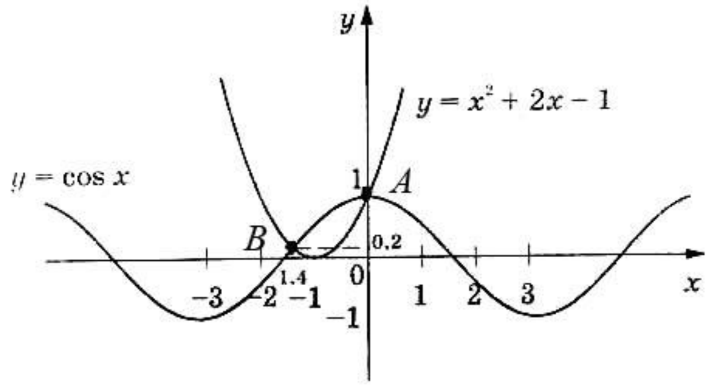


Рис.35

Графики функций пересекаются в точках $A(0;1)$ и $B(x \approx -1{,}4;\, y \approx 0{,}2)$. На промежутке $[-1{,}4;\, 0]$ точки графика функции $y = x^2 + 2x + 1$ ниже точек графика $y = \cos x$. Значит, $\cos x \geq x^2 + 2x + 1$ при $-1{,}4 \leq x \leq 0$.

Ответ: $x \in [-1{,}4;\, 0]$.

Задачи для аудиторной работы:

Решить неравенство:

1. $\sin 2x \le \cos x$
2. $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} > -\frac{1}{4}$
3. $\operatorname{tg} x < -x+1$, если $0 < x < \pi$
4. $\sqrt{1-\cos^2 x} + \sin x \le \frac{\pi}{2}$
5. $\sqrt{1-\sin^2 x} + \cos x \ge \frac{\pi}{2}$
6. $ctg\frac{x}{2}\cdot \sin x \ge 2\pi$
7. $\sin x - 5x + 3 \le 0$
8. $\sin^2\left(\sqrt{tgx}\right) + \cos^2\left(\sqrt{tgx}\right) > 2 - x$
9. $\sin x\sqrt{\cos^2 x} + \cos x\sqrt{\sin^2 x} \le x - 1$
10. $\left|\sin x + \cos x\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

2.2 Метод подстановки

Довольно часто исходное тригонометрическое неравенство путем удачно выбранной подстановки удается свести к алгебраическому (рациональному или иррациональному) неравенству. Рассмотрим на конкретных примерах применение этого метода.

Пример 1. Решить неравенство: $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$.

Решение: Так как $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, то это неравенство эквивалентно следующему:

$$-4\sin^3 x + 2\sin^2 x + 2\sin x - 1 < 0.$$

Или, полагая $\sin x = t$, $|t| \le 1$, получим:

$4t^3 - 2t^2 - 2t + 1 > 0 \Leftrightarrow 2t^2(2t-1) - (2t-1) > 0 \Leftrightarrow (2t-1)\left(2t^2-1\right) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2t-1)\left(\sqrt{2}t-1\right)\left(\sqrt{2}t+1\right) > 0$. Решая это неравенство методом интервалов (рис.36), получим: $-\frac{\sqrt{2}}{2} < t < \frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} < t \le 1$.

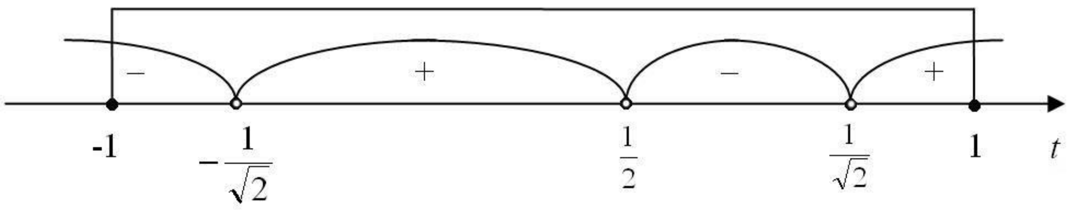


Рис.36

Следовательно, для отыскания x получаем совокупность неравенств (рис.37):

I. $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$;

II. $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

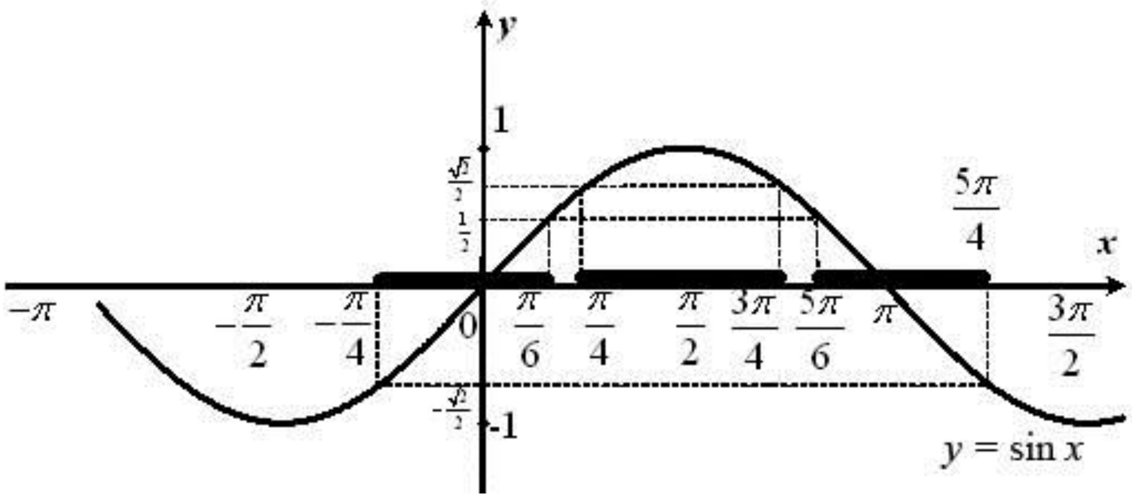


Рис.37

Ответ:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 2. Решить неравенство: $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > 1$.

Решение: <u>Первый способ</u>. ОДЗ: $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in R$.

Используя формулы:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (1)$$

запишем неравенство в виде

$$\frac{2\operatorname{tg} 2x}{1+\operatorname{tg}^2 2x}+\frac{1-\operatorname{tg}^2 2x}{1+\operatorname{tg}^2 2x}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} 2x}>1$$

или, полагая $t=\operatorname{tg} 2x$, после несложных преобразований получим $\frac{t^3-t^2+t-1}{t\left(t^2+1\right)}<0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)\left(t^2+1\right)}{t\left(t^2+1\right)}<0 \Leftrightarrow \frac{t-1}{t}<0$.

Решая последнее неравенство методом интервалов, получаем:

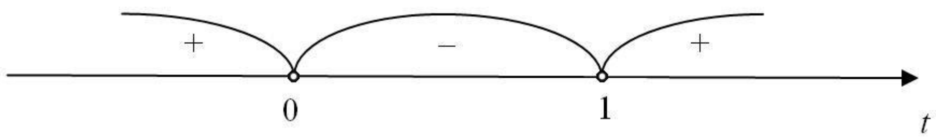


Рис.38

$0<t<1 \Rightarrow 0<\operatorname{tg} 2x<1$. Тогда из рис.39 следует $\pi k<u<\frac{\pi}{4}+\pi k$, где $u=2x$.

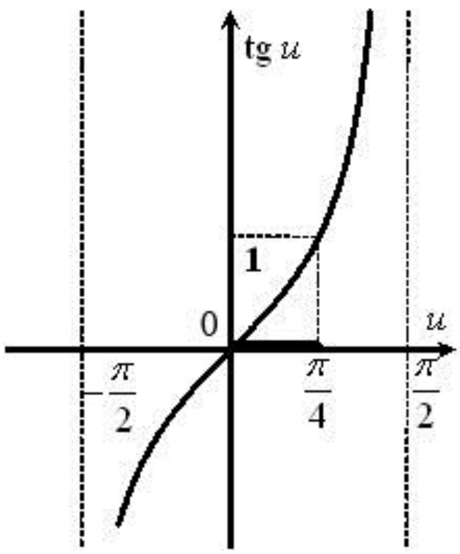


Рис.39

Ответ: $x\in\left(\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{8}(1+4k)\right)$, $k\in Z$.

Замечание. Подстановка, определяемая формулами (1) теряет смысл при $\alpha=\pi+2\pi k$ или (так как $\alpha=4x$) при $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, а эти значения могут быть решениями исходного неравенства.

Второй способ. Исходное неравенство в ОДЗ эквивалентно неравенству

$$\sin 4x + \cos 4x \frac{\cos 2x}{\sin 2x} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sin 4x \sin 2x + \cos 4x \cos 2x}{\sin 2x} > 1.$$

Применим формулу $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Получим $\frac{\cos 2x}{\sin 2x} > 1 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} 2x > 1$.

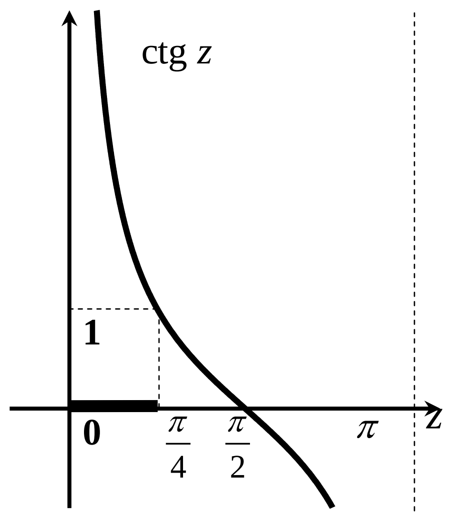


Рис.40

Тогда по рис.40 $\pi k < z < \frac{\pi}{4} + \pi k$, где $z = 2x$.

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{8}(1+4k)\right)$, $k \in Z$.

Пример 3. Решить неравенство: $2\sin^2 3x + \sin^2 6x < 2$.

Решение: Проведем следующие преобразования:

$2\sin^2 3x + \sin^2 6x < 2$,

$2\sin^2 3x + 4\sin^2 3x \cos^2 3x < 2$,

$2\sin^4 3x - 3\sin^2 3x + 1 > 0$.

Введем обозначение $t = \sin 3x$, $|t| \leq 1$, получим $2t^4 - 3t^2 + 1 > 0$. Корнями многочлена, стоящего в левой части неравенства, будут $t_1 = -1$, $t_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $t_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t_4 = 1$. Таким образом:

$$2t^4 - 3t^2 + 1 > 0 \quad (t+1)\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(t-1) > 0.$$

Применим метод интервалов для решения последнего неравенства (рис.41). Решением неравенства будут значения переменной $t<-1$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t>1$.

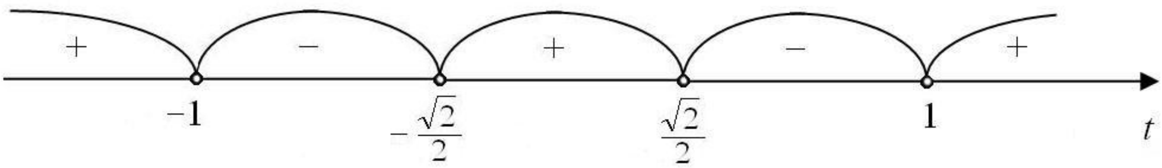


Рис.41

Итак, $2t^4-3t^2+1>0$, $\left[\begin{array}{l} t<-1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}<t<\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ t>1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin 3x<-1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin 3x<\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 3x>1 \end{array}\right.$

Первый и последний компоненты совокупности неравенств отбрасываем как ложные, ибо $|\sin 3x|\le 1$. Поэтому: $2\sin^2 3x+\sin^2 6x<2$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin 3x<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Применяем следующее преобразование $a<\sin x<b$.

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a<b \\ -1\le a<1 \\ -1<b\le 1 \\ \left[\begin{array}{l} \arcsin a+2\pi k<x<\arcsin b+2\pi k \\ \pi-\arcsin b+2\pi n<x<\pi-\arcsin a+2\pi n \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} b>1 \\ a<-1 \\ -\infty<x<\infty \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} a\ge b \\ a\ge 1 \\ b\le -1 \end{array}\right. \\ R \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Получим:

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{4}+2\pi n<3x<\frac{\pi}{4}+2\pi n \\ \pi-\frac{\pi}{4}+2\pi k<3x<\pi+\frac{\pi}{4}+2\pi k \end{array}\right., \text{ где } k,\ n \text{ – целые числа.}$$

Оба двойных неравенства объединить в одно:

$-\frac{\pi}{4}+m\pi<3x<\frac{\pi}{4}+m\pi$. Откуда

$-\frac{\pi}{12}+\frac{m\pi}{3}<x<\frac{\pi}{12}+\frac{m\pi}{3}$, где m – целое число.

Ответ: $-\frac{\pi}{12}+\frac{m\pi}{3}<x<\frac{\pi}{12}+\frac{m\pi}{3}$, $m\in Z$.

Задачи для аудиторной работы:

Решить неравенство:

1. $\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x>\sqrt{2}$
2. $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}\geq 3\operatorname{tg} x$
3. $-2\leq \operatorname{tg} x<1$
4. $2\sin^2 x-5\sin x+2>0$
5. $\sin^4 x+\cos^4 x\geq \frac{\sqrt{3}}{2}$
6. $\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{ctg} x-2\leq 0$

2.3 Метод интервалов. Обобщенный метод интервалов

При решении тригонометрических неравенств вида $f(x)>0$, $f(x)\geq 0$, $f(x)<0$, $f(x)\leq 0$ с 2π – периодической функцией $f(x)$ методом интервалов приходится иметь дело с бесконечной системой интервалов знакопостоянства функции $f(x)$. Чтобы избежать эту трудность, мы будем пользоваться изображением этих интервалов на окружности. При этом условимся изображать интервалы, где функция положительна, вне окружности, а отрицательна внутри.

Наиболее простыми тригонометрическими функциями являются функции гармонического колебания $A\sin(\omega x+\varphi)$, $A\cos(\omega x+\varphi)$, $\omega\neq 0$ – частота колебания, $A\neq 0$ – амплитуда. Для этих функций справедливо следующее.

Правило чередования знаков.

Знаки функций гармонического колебания в их интервалах знакопостоянства чередуются, то есть знаки в соседних интервалах разные.

Это правило можно доказать путем построения графиков функций $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ и $y=A\cos(\omega x+\varphi)$. Их графики получаются из графиков функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ растяжением в A раз вдоль оси Oy, сжатием в ω раз вдоль оси Ox и дальнейшим сдвигом вдоль оси Ox на φ влево. Поэтому в точках пересечения с осью Ox эти графики обязаны пересечь ось Ox "сверху вниз" или "снизу вверх". Следует также подчеркнуть, что правило чередования знаков верно не для всех функций. Например, оно не верно для функции $y=1-\cos 2x=2\sin^2 x$. Эта функция положительна во всех своих интервалах знакопостоянства $(\pi n;\pi+\pi n)$, $n\in Z$. Ее график касается оси Ox в точках пересечения с ней и выше ее во всех других точках.

Вернемся к функциям гармонического колебания. Эти функции имеют период $\frac{2\pi}{\omega}$ и в любом промежутке длины $\frac{2\pi}{\omega}$ вида $\left[\alpha;\alpha+\frac{2\pi}{\omega}\right)$ имеют ровно два нуля. Следовательно, если $\omega\in\mathbf{Z}$, то эти функции 2π – периодичны и в любом промежутке длины 2π вида $\left[\alpha;\alpha+\frac{2\pi}{\omega}\right)$ имеют ровно 2ω нулей.

Рассмотрим применение метода на конкретных примерах.

Пример 1. Решить неравенство: $\cos 3x>0$.

Решение: Пусть $f(x)=\cos 3x$. Эта функция является функцией гармонического колебания с целой частотой $\omega=3$ и, следовательно, 2π

периодична. Найдем ее нули в промежутке $[0;2\pi)$: $\cos 3x = 0$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

При $n = 0, 1, \ldots, 5$ получим ровно $2\omega = 6$ нулей в $[0;2\pi)$:

$n = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$ $\quad$ $n = 3$, $x = \frac{7\pi}{6}$

$n = 1$, $x = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $n = 4$, $x = \frac{3\pi}{2}$

$n = 2$, $x = \frac{5\pi}{6}$ $\quad$ $n = 5$, $x = \frac{11\pi}{6}$

Изобразим эти нули на окружности $P_{\frac{\pi}{6}}$, $P_{\frac{\pi}{2}}$, $P_{\frac{5\pi}{6}}$, $P_{\frac{7\pi}{6}}$, $P_{\frac{3\pi}{2}}$, $P_{\frac{11\pi}{6}}$. Эти точки делят окружность на 6 дуг, соответствующих интервалам знакопостоянства функции $f(x)$ (рис.42). Поскольку эти знаки чередуются, то достаточно определить знак в одном интервале, например, в $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$: для $x = 0 \in \left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$ $f(x) = \cos x > 0$. Учитывая это, получим указанные на рис.36 распределения знаков.

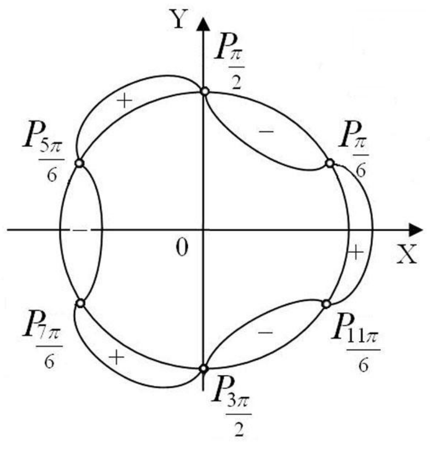


Рис.42

Ответ:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in Z.$$

Ответ можно записать и по-другому. Заметив, что интервалы и знаки повторяются через $\frac{2\pi}{3}$: $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \right)$, $n \in Z$.

Для решения более сложных примеров нам понадобится понятие кратности нуля функции. Это понятие определяется в высшей математике для любой аналитической функции следующим образом: точка $x = \alpha$ называется *нулем* $k \geq 1$ *аналитической функции* $f(x)$, если эта функция обращается в нуль в точке $x = \alpha$ вместе со всеми своими производными порядка $\leq k - 1$, а производная порядка k не обращается в нуль в точке $x = \alpha$. Нули кратности 1 называются также *простыми нулями*, а нули кратности $k > 1$ называются *кратными*.

Для функций, являющихся произведением функции гармонического колебания, можно дать следующее правило вычисления кратности нулей. Кратность нуля $x = \alpha$ функции $f(x)$, являющейся произведением функций гармонического колебания, равна числу множителей, обращающихся в нуль в точке $x = \alpha$. В частности, если функция $f(x)$ является k-й степенью гармонического колебания, то все ее нули имеют кратность k. Последнее при $k - 1$ означает, что все нули функции гармонического колебания простые.

В качестве примера применения этого правила рассмотрим функцию, $f(x) = \cos x \sin 2x \sin 4x$ являющуюся произведением трех функций гармонического колебания. В точке $x = \frac{\pi}{2}$ обращаются в нуль все три множителя функции $f(x)$. Поэтому эта точка является нулем кратности 3 для $f(x)$. Точка $x = 0$ является нулем двух множителей $\sin 2x$ и $\sin 4x$ функции $f(x)$, но не является нулем множителя $\cos x$. Поэтому эта точка является нулем кратности 2 для $f(x)$.

Обобщением приведенного выше правила чередования знаков является следующее.

Общее правило изменения знаков функции. При прохождении аргумента x функции $f(x)$ через нуль нечетной кратности функция меняет знак, а четной – нет.

Ниже будем придерживаться следующего соглашения. Если точка $x=\alpha$ является нулем кратности k 2π-периодической функции $f(x)$, то изображение этой точки на окружности будем обозначать через P_α^k, если $k \geq 2$, и просто через P_α – если $k=1$.

Пример 2. Решить неравенство: $\cos\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)\cos 2x \sin 4x \geq 0$.

Решение: Рассмотрим функцию $y=\cos\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)\cos 2x \sin 4x$. Эта функция является произведением трех функций гармонического колебания с целыми частотами $\omega=1$, $\omega=2$ и $\omega=4$ соответственно. В частности функция $f(x)$ имеет период 2π. Найдем нули этой функции в промежутке $[0;2\pi)$.

Нули множителя $\cos\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)$, $\omega=1$: $\cos\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)=0$ $x=\frac{5}{4}\pi+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. При $n=-1$ и $n=0$ получаем ровно $2\omega=2$ нуля $x=\frac{\pi}{4}$ и $x=\frac{5\pi}{4}$, принадлежащих промежутку $[0;2\pi)$.

Нули множителя $\cos 2x$, $\omega=2$: $\cos 2x=0$ $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. При $n=0,1,2,3$ получаем ровно $2\omega=4$ нуля, принадлежащих $[0;2\pi)$: $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{3\pi}{4}$, $x=\frac{5\pi}{4}$, $x=\frac{7\pi}{4}$.

Нули множителя $\sin 4x$, $\omega = 4$: $\sin 4x = 0$ $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$. При $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ получаем ровно $2\omega = 8$ нулей, принадлежащих $[0; 2\pi)$: $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \pi$, $x = \frac{5\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{7\pi}{4}$.

Объединяя множества нулей всех трех множителей и пользуясь правилом вычисления кратности нулей, получим, что функция $f(x)$ имеет 8 нулей в $[0; 2\pi)$: 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, π, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{4}$, кратности которых равны соответственно 1, 3, 1, 2, 1, 3, 1, 2. Изобразим эти нули на окружности точками P_0, $P^3_{\frac{\pi}{4}}$, $P_{\frac{\pi}{2}}$, $P^2_{\frac{3\pi}{4}}$, P_{π}, $P^3_{\frac{5\pi}{4}}$, $P_{\frac{3\pi}{2}}$, $P^2_{\frac{7\pi}{4}}$, в соответствии с принятым выше соглашением (рис.43).

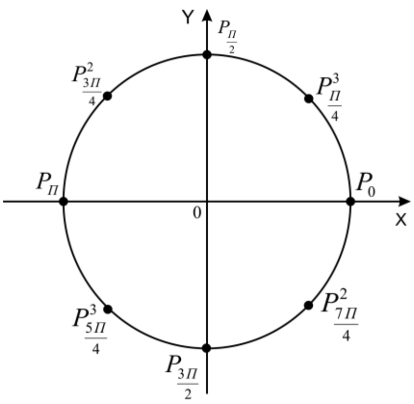


Рис.43

Эти точки делят окружность на 8 дуг, соответствующих интервалам знакопостоянства функций $f(x)$. Для определения знаков функции $f(x)$ в этих интервалах поступим следующим образом. Сначала определим знак функции $f(x)$ в интервале $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ методом пробной точки. для этого выберем достаточно малый угол $x = \frac{\pi}{100} \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. Тогда угол $x - \frac{3\pi}{4}$ в третьей четверти, а углы $2x$ и $4x$ в первой четверти. Поэтому $f(x) < 0$ при $x = \frac{\pi}{100}$. Следовательно, $f(x) < 0$ для всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Далее, пользуясь общим правилом изменения знаков функции, определим знаки функции $f(x)$ в других интервалах. В результате получим указанное на рис.37 распределение знаков.

Ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right] \cup \left[\pi+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right] \cup$
$\cup \left[\frac{3\pi}{2}+2\pi n; 2\pi+2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ниже нам понадобится следующее ***правило сложения кратностей***. Если точка $x=\alpha$ является нулем функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ кратности k_1, k_2, …, k_n соответственно, то эта точка является нулем кратности $k=k_1+k_2+\ldots+k_n$ для функции $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)$. Это правило остается верным и в тех случаях, когда некоторые множители функции $f(x)$ не обращаются в нуль в точке $x=\alpha$. При этом считается, что если $f_i(\alpha)\neq 0$, то $k=0$.

В качестве примера применения этого правила рассмотрим функцию $f(x)=\cos 3x \sin^2 2x$. Тогда $x=\frac{\pi}{2}$ является нулем кратности $k_1=3$ множителя $\cos 3x$ и нулем кратности $k_2=2$ множителя $\sin^2 2x$. Поэтому эта точка является нулем кратности $k=k_1+k_2=3+2=5$ для $f(x)$. Точка $x=0$ не является нулем множителя $\cos 3x$ (т.е. $k_1=0$), но является нулем кратности $k_2=2$ множителя $\sin^2 2x$. Поэтому эта точка является нулем кратности $k=k_1+k_2=0+2=2$ для $f(x)$.

Пример 3. Решить неравенство: $\sin^3\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cos^2 3x<0$.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x)=\sin^3\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cos^2 3x$. Эта функция имеет период π. В частности она может быть рассмотрена как функция с периодом 2π. Найдем ее нули, принадлежащие $[0;2\pi)$.

Нули множителя $\sin^3\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. Этот множитель является кубом функции гармонического колебания с целой частотой $\omega=2$. Поэтому он имеет ровно $2\omega=4$ нуля в $[0;2\pi)$, каждый из которых имеет кратность 3. Найдем эти нули: $\sin^3\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$ $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. При $n=1,2,3,4$ получаем 4 нуля, принадлежащих $[0;2\pi)$: $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{5\pi}{6}$, $x=\frac{4\pi}{3}$, $x=\frac{11\pi}{6}$.

Нули множителя $\cos^2 3x$. Этот множитель является квадратом функции гармонического колебания с целой частотой $\omega=3$. Поэтому он имеет ровно $2\omega=6$ нулей в $[0;2\pi)$, каждый кратности 2. Найдем эти нули: $\cos^2 3x=0$ $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$. При $n=0,1,2,3,4,5$ получаем 6 нулей, принадлежащих $[0;2\pi)$: $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{5\pi}{6}$, $x=\frac{7\pi}{6}$, $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=\frac{11\pi}{6}$. Объединяя полученные множества нулей множителей функции $f(x)$ и пользуясь правилом сложения кратностей, получим, что функция $f(x)$ имеет 8 нулей в $[0;2\pi)$: $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{5\pi}{6}$, $x=\frac{7\pi}{6}$, $x=\frac{4\pi}{3}$, $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=\frac{11\pi}{6}$, кратности которых равны соответственно 2, 3, 2, 5, 2, 3, 2, 5. Изобразим эти нули на окружности (рис.44).

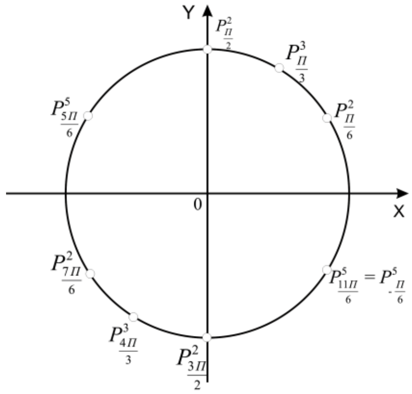


Рис.44

Получим разбиение окружности на 8 дуг, соответствующих интервалам знакопостоянства функции $f(x)$. Далее, проверив, что $f(x)>0$ при $x=0$, делаем вывод, что $f(x)>0$ для всех $x\in\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$. Исходя из этого и, пользуясь общим правилом изменения знаков функции, определим знаки функции в других интервалах. В результате получим указанное на рисунке распределение знаков.

Как видно из этого рисунка, знаки функции $f(x)$ распределены симметрично относительно центра окружности (что естественно, так как функция $f(x)$ имеет период π).

Ответ: $x\in\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right),\ n\in Z$.

Отметим, что не всегда удается быстро преобразовать исходное тригонометрическое неравенство в алгебраическое и даже если это удается сделать, то преобразованное уравнение трудно поддается исследованию, поэтому в таких случаях целесообразно применять метод интервалов непосредственно к исходному неравенству.

Рассмотрим для простоты неравенство вида

$$F\left[\sin(a_1x+b_1);\cos(a_2x+b_2)\right]>0 \qquad (1)$$

Здесь F – рациональная функция аргументов, указанных в квадратных скобках (другими словами, над функциями $\sin(a_1x+b_1)$, $\cos(a_2x+b_2)$ могут производиться только четыре алгебраических действия и операция возведения в целую степень); a_1, a_2 – рациональные числа, т.е. $a_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $a_2 = \frac{p_2}{q_2}$, где p_1 и p_2, q_1 и q_2 – целые числа; b_1, b_2 – любые действительные числа. Под периодом неравенства (1) будем понимать период сложной функции $F(x)$. Как известно, число T – период функции $F(x)$, если при любых x имеет место равенство

$$F(x+T) = F(x) \tag{2}$$

Сложная функция $F(x)$ является периодической и ее период определяется по формуле

$$T = 2\pi \frac{q}{p}, \tag{3}$$

где p – наибольший общий делитель (НОД) чисел p_1 и p_2, а q – наименьшее общее кратное (НОК) чисел q_1 и q_2. Напомним, что НОК нескольких чисел – это наименьшее число, которое делится на эти числа.

Приступим к доказательству нашего утверждения. Рассмотрим функцию $\sin(a_1 x + b_1)$. Покажем, что число T является ее периодом, т.е. для любых x в соответствии с формулой (2) имеет место равенство

$$\sin\left(a_1(x+T) + b_1\right) = \sin(a_1 x + b_1) \tag{4}$$

Действительно, $\sin\left(a_1(x+T) + b_1\right) = \sin(a_1 x + b_1 + a_1 T)$, где $a_1 T = 2\pi a_1 \frac{q}{p} = 2\pi \frac{p_1}{q_1} \frac{q}{p} = 2\pi \frac{p_1}{p} \frac{q}{q_1}$. Но $\frac{p_1}{p}$ – целое число, так как p – НОД чисел p_1 и p_2; число $\frac{q}{q_1}$ также целое, так как q – НОК чисел q_1 и q_2. Таким образом, число $a_1 T$ можно представить в виде $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, а это приводит к равенству (4).

Точно также доказывается, что функция $\cos(a_2x+b_2)$ периодическая с тем же самым периодом T. Но тогда

$$F(x+T)=F\left[\sin(a_1x+b_1+a_1T);\cos(a_2x+b_2+a_2T)\right]=$$
$$=F\left[\sin(a_1x+b_1);\cos(a_2x+b_2)\right]=F(x),$$

т.е. функция F периодическая с периодом $T=2\pi\dfrac{q}{p}$.

При решении тригонометрических неравенств желательно найти наименьший период функции, чтобы уменьшить объем вычислений. Иногда, как это видно из предыдущего примера, это удается сделать с помощью тождественных преобразований.

Пример 4. Решить неравенство $\sin 3x\cos 2x<0$.

Решение: $a_1=p_1=3$, $a_2=p_2=2$; $p=1$, $T=2\pi$. Будем решать неравенство методом интервалов. Уравнение $f(x)=\sin 3x\cos 2x=0$ эквивалентно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x=0\\ \cos 2x=0\end{array}\right.,\quad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi k}{3}\\ x=\dfrac{\pi}{4}(1+2k)\end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Следовательно, на отрезке $[0;2\pi]$ функция $f(x)$ имеет следующие действительные и различные корни: $x_1=\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=\dfrac{\pi}{3}$, $x_3=\dfrac{2\pi}{3}$, $x_4=\dfrac{3\pi}{4}$, $x_5=\pi$, $x_6=\dfrac{5\pi}{4}$, $x_7=\dfrac{4\pi}{3}$, $x_8=\dfrac{5\pi}{3}$, $x_9=\dfrac{7\pi}{4}$, $x_{10}=2\pi$. Так как $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой $f'(x_i)\neq 0$ ($i=1,2,\ldots,10$), то при переходе через корни она обязательно меняет знак. Следовательно, для построения знаковой схемы для $f(x)$ достаточно определить ее знак на любом из промежутков, на которые разбивается отрезок $[0;2\pi]$ корнями уравнения $f(x)=0$. Пусть это будет интервал $\left(\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)$. В качестве контрольной точки выберем число $\frac{\pi}{2}$.

Тогда $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}\cos\frac{2\pi}{2}=(-1)(-1)>0$.

Знаковая схема $f(x)$ представлена на рисунке 45:

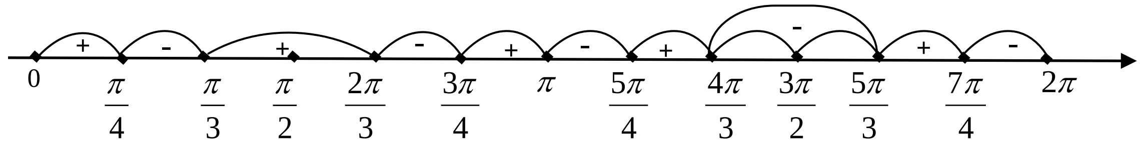


Рис.45

Ответ: $x\in\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)\cup$

$\cup\left(\pi+2\pi k;\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi k;\frac{5\pi}{3}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi k;2\pi+2\pi k\right)$, $k\in Z$.

Задачи для аудиторной работы:

Решить неравенство:

1. $\sin 2t-\sin 3t>0$
2. $\operatorname{tg}\frac{t}{2}-\operatorname{tg}\frac{t}{3}>0$
3. $4\sin x\cos x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)<\sin 6x$
4. $\sin x\sin 3x\ge\sin 2x\sin 4x$
5. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x>0$
6. $\dfrac{\sin 3x\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2x}\le 0$

2.4 Метод секторов для решения тригонометрических неравенств

Рассмотрим метод секторов для решения тригонометрических неравенств. Решение неравенств вида $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$ (<0, ≥ 0, ≤ 0), где $P(x)$ и

$Q(x)$ – рациональные тригонометрические функции (синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы входят в них рационально), аналогично решению рациональных неравенств. Рациональные неравенства удобно решать методом интервалов на числовой оси. Его аналогом при решении рациональных тригонометрических неравенств является метод секторов в тригонометрическом круге, для $\sin x$ и $\cos x$ $(T = 2\pi)$ или тригонометрическом полукруге для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ $(T = \pi)$.

1. Неравенства вида $\dfrac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)} > 0$ (< 0, ≥ 0, ≤ 0).

В методе интервалов каждому линейному множителю числителя и знаменателя вида $(x - x_0)$ на числовой оси соответствует точка x_0, и при переходе через эту точку $(x - x_0)$ меняет знак. В методе секторов каждому множителю вида ($f(x) - a$), где $f(x)$ – одна из функций $\sin x$ или $\cos x$ и $-1 < a < 1$, в тригонометрическом круге соответствуют два угла x_1 и x_2 ($f(x_1) = f(x_2) = a$), которые делят круг на два сектора. При переходе через x_1 и x_2 функция ($f(x) - a$) меняет знак.

Необходимо помнить следующее:

а) Множители вида $(\sin x - a)$ и $(\cos x - a)$, где $|a| > 1$, сохраняют знак для всех значений x. Такие множители числителя и знаменателя отбрасывают, изменяя (если $a > 1$) при каждом таком отбрасывании знак неравенства на противоположный.

б) Множители вида $(\sin x \pm 1)$ и $(\cos x \pm 1)$ также отбрасываются. При этом, если это множители знаменателя, то в эквивалентную систему неравенств добавляются неравенства вида $\sin x \neq \pm 1$ и $\cos x \neq \pm 1$. Если это множители числителя, то в эквивалентной системе ограничений им соответствуют неравенства $\sin x \neq \pm 1$ и $\cos x \neq \pm 1$ в случае строгого исходного неравенства, и равенства $\sin x = \pm 1$ и $\cos x = \pm 1$ в случае нестрогого исходного неравенства. При отбрасывании множителя $(\sin x - 1)$ или $(\cos x - 1)$ знак неравенства изменяется на противоположный.

Пример 1. Решить неравенства: а) $\sin x > \frac{1}{2}$; б) $\sin x < \frac{1}{2}$.

Решение: В тригонометрическом круге уравнению $\sin x = \frac{1}{2}$ соответствуют два угла $x_1 = \frac{\pi}{6}$ и $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. Они делят круг на два сектора, в каждом из которых функция $y = \sin x - \frac{1}{2}$ сохраняет знак (рис.46).

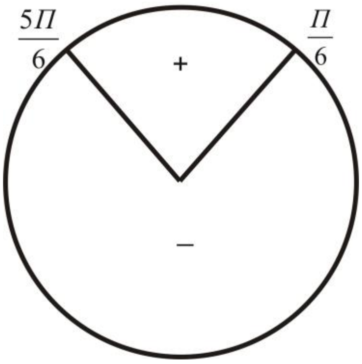


Рис.46

В секторе $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ имеем $\sin x - \frac{1}{2} > 0$. В секторе $\frac{5\pi}{6} - 2\pi < x < \frac{\pi}{6}$, очевидно, $\sin x - \frac{1}{2} < 0$. Период функции $y = \sin x$ $T = 2\pi$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$;

б) $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Пример 2. Решить неравенства: а) $\cos 3x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos 3x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение: Положим $z = 3x$ и рассмотрим неравенства а) $\cos z > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos z \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$. В тригонометрическом круге уравнению $\cos z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

соответствуют два решения $z_1 = \frac{5\pi}{6}$ и $z_2 = \frac{7\pi}{6}$. Круг делится на два сектора, в каждом из которых функция $y = \cos z + \frac{\sqrt{3}}{2}$ сохраняет знак (рис.47).

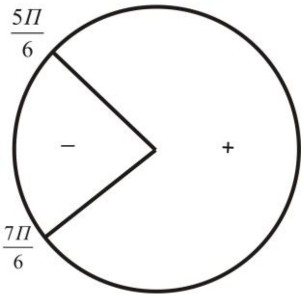


Рис.47

В секторе $\frac{5\pi}{6} < z < \frac{7\pi}{6}$ имеем $\cos z + \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$. В секторе $\frac{7\pi}{6} - 2\pi < z < \frac{5\pi}{6}$, очевидно, $\cos z + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$. Период функции $y = \cos z$ $T = 2\pi$.

Получаем:

а) $\cos z > -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < z < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$;

б) $\cos z > -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le z \le \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Теперь вместо z необходимо подставить $3x$.

Ответ: а) $-\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$;

б) $\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} \le x \le \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$.

2. Неравенства вида $\frac{P(\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)}{Q(\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)} > 0$ (< 0, ≥ 0, ≤ 0).

Каждому множителю вида ($f(x) - a$), где $f(x)$ одна из функций $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$, в тригонометрическом полукруге $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (или $0 < x < \pi$) соответствует один угол x_0 такой, что $f(x_0) = a$. При переходе через x_0

функция ($f(x)-a$) меняет знак. Кроме того, $\operatorname{tg} x$ не определен при $x=\pm\frac{\pi}{2}$, и слева, и справа от этих точек имеет разные знаки. Аналогично, $\operatorname{ctg} x$ не определен при $x=0$ и $x=\pi$, и слева, и справа от этих точек имеет разные знаки.

Пример 3. Решить неравенства а) $\operatorname{tg} x>1$; б) $\operatorname{tg} x\le 1$.

Решение: В тригонометрическом полукруге $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ уравнению $\operatorname{tg} x=1$ соответствует один угол $x_0=\frac{\pi}{4}$. При $x=\pm\frac{\pi}{2}$ функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена. Указанные три угла делят полукруг на два сектора, в каждом из которых функция $y = \operatorname{tg} x-1$ сохраняет знак (рис.48).

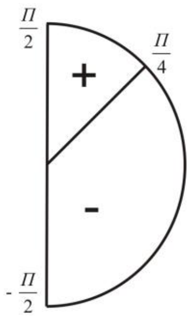


Рис.48

В секторе $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ имеем $\operatorname{tg} x-1>0$.

В секторе $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}$, очевидно, $\operatorname{tg} x-1<0$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет период $T=\pi$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; б) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x\le\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.

Пример 4. Решить неравенства а) $\operatorname{ctg} 2x>\sqrt{3}$, б) $\operatorname{ctg} 2x\le\sqrt{3}$.

Решение: Положим $z=2x$ и рассмотрим неравенства.

а) $\operatorname{ctg} z>\sqrt{3}$, б) $\operatorname{ctg} z\le\sqrt{3}$. В тригонометрическом полукруге $0<z<\pi$ уравнению $\operatorname{ctg} z>\sqrt{3}$ соответствует один угол $z_0=\frac{\pi}{6}$. При $z=0$ и $z=\pi$ функция $y = \operatorname{ctg} z$ не определена. Указанные три угла делят полукруг на два сектора, в каждом из которых функция $y = \operatorname{ctg} z-\sqrt{3}$ сохраняет знак (рис.49).

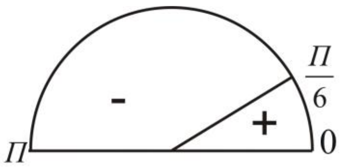


Рис.49

В секторе $0 < z < \dfrac{\pi}{6}$ имеем $\operatorname{ctg} z - \sqrt{3} > 0$.

В секторе $\dfrac{\pi}{6} < z < \pi$, очевидно, $\operatorname{ctg} z - \sqrt{3} < 0$.

Функция $y = \operatorname{ctg} z$ имеет период $T = \pi$.

Получаем: а) $\operatorname{ctg} z > \sqrt{3} \Rightarrow \pi n < z < \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$;

б) $\operatorname{ctg} z \le \sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{\pi}{6} + \pi n \le z < \pi + \pi n,\ n \in Z$.

Остается вместо z подставить $2x$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi n}{2} < x < \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z$; б) $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2} \le x < \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

Пример 5. Решить неравенство $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x > 0$.

Решение: Имеем: $\operatorname{ctg} x(\operatorname{ctg} x + 1) > 0$.

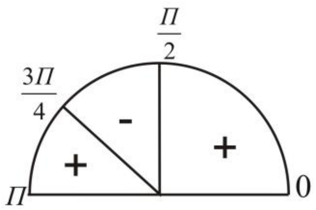


Рис.50

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \pi n < x < \dfrac{\pi}{2} + \pi n \\ \dfrac{3}{4}\pi + \pi n < x < \pi + \pi n \end{array}\right.,\ n \in Z$.

Пример 6. Решить неравенство $\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x \le 0$.

Решение: Имеем: $\operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\right)\left(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\right) \le 0$.

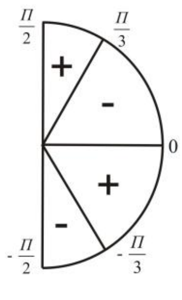


Рис.51

Ответ: $\left[\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{2} + \pi n < x \le -\dfrac{\pi}{3} + \pi n \\ \pi n \le x \le \dfrac{\pi}{3} + \pi n \end{array}\right.,$

$n \in Z$.

3. Неравенства, содержащие $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ одновременно, или содержащие тригонометрические функции различных аргументов.

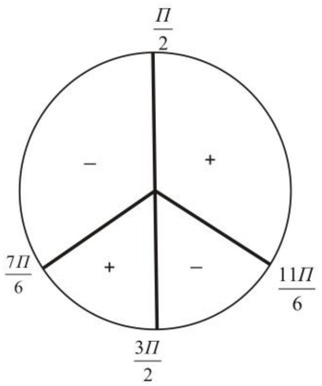
Здесь необходимо найти общий период функций, входящих в неравенство, и, используя различные тождественные преобразования, разложить неравенство на простейшие множители.

Пример 7. Решить неравенство $\sin 2x \sin 3x - \cos 2x \cos 3x > \sin 10x$.

Решение: Имеем:

$$-\cos 5x > \sin 10x,\ 2\sin 5x \cos 5x + \cos 5x < 0,\ \cos 5x\left(\sin 5x + \frac{1}{2}\right) < 0.$$

Положим $5x = t$. Тогда $\cos t\left(\sin t + \frac{1}{2}\right) < 0$.



$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n \\ \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n < t < \dfrac{11\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right.,\ n \in Z.$$

Рис.52

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5} < x < \dfrac{7\pi}{30} + \dfrac{2\pi n}{5} \\ \dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5} < x < \dfrac{11\pi}{30} + \dfrac{2\pi n}{5} \end{array}\right.,\ n \in Z.$

Пример 8. Решить неравенство $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x \geq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Решение: Воспользуемся формулами

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Имеем: $(3\sin x - \sin 3x)\cos 3x + (\cos 3x + 3\cos x)\sin 3x \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$$\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x \geq \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 4x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Положим $4x = t$, получим $\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0$.

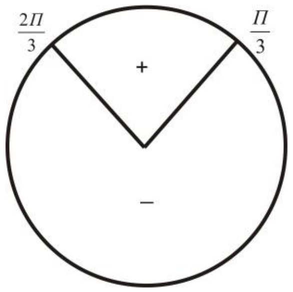


Рис.53

$$\frac{\pi}{3}+2\pi n\le t\le\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\le x\le\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$

Задачи для аудиторной работы:

Решить неравенство:

1. $\frac{2\sin^3 x-\sin^2 x-\sin x}{2\cos^2 x+3\cos x-2}>0$
2. $\frac{2\cos^2 x-6}{3^{2\cos^2 x-1}}>\frac{\cos x}{3^{1-2\cos^2 x}}$
3. $\log_{\sin^2 x}\cos x\le\frac{1}{2}$
4. $2\sin^2 x-\sin x-1\ge 0$
5. $6\cos^2 x-3\cos x+1<0$
6. $\mathrm{tg}\,x\ge\frac{\mathrm{tg}\,2x-2}{\mathrm{tg}\,2x+2}$
7. $\frac{\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)(\mathrm{tg}\,x-1)}{\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)(\mathrm{ctg}\,x+1)}\ge 0$
8. $2\sin^2 x-\sin x+\sin 3x<1$
9. $4\sin x\sin 2x\sin 3x>\sin 4x$

2.5 Метод концентрических окружностей для систем тригонометрических неравенств

Данный метод является аналогом метода параллельных числовых осей при решении систем рациональных неравенств.

Рассмотрим пример системы неравенств.

$$\begin{cases} \dfrac{(x+2)^3(x+1)(x-4)}{(x+4)x^2(x-2)} \geq 0, \\ \dfrac{x}{(x+3)(x-3)} \geq 0, \\ \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+5)(x-4)} \geq 0. \end{cases}$$

Если систему решать на одной числовой оси, то может получиться весьма трудночитаемое изображение (рис.54):

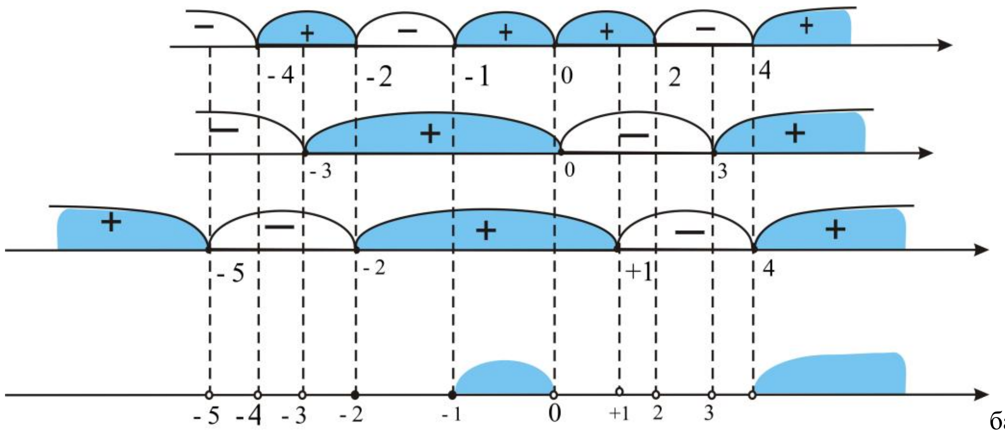


Рис.54

Ответ: $\{-2\} \cup [-1;0) \cup (4;+\infty)$.

Пример 1. Решить систему простейших тригонометрических неравенств $\begin{cases} \cos x < -\dfrac{1}{2}, \\ \sin 2x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} x \geq -1. \end{cases}$

Решение: Сначала решим каждое неравенство отдельно (рис.55). В правом верхнем углу рисунка будем указывать, для какого аргумента рассматривается тригонометрическая окружность.

$$\sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos x < -\frac{1}{2} \qquad \mathrm{tg}\, x \geq -1$$

$2x$ $\qquad\qquad$ x

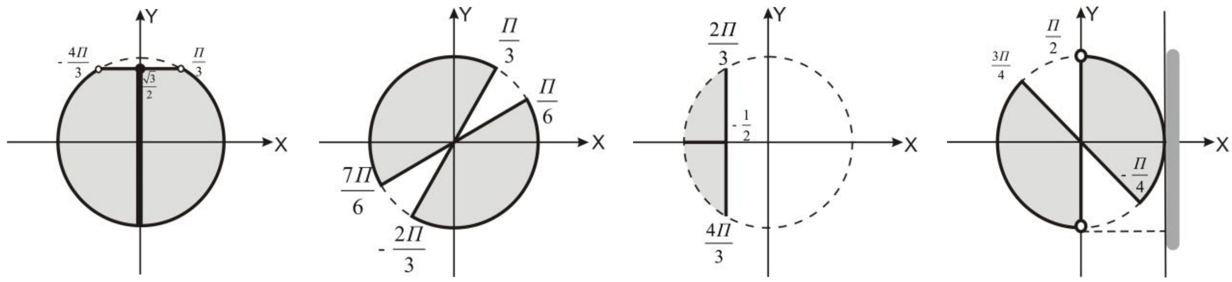


Рис.55

Далее строим систему концентрических окружностей для аргумента x. Рисуем окружность и заштриховываем ее согласно решению первого неравенства, затем рисуем окружность большего радиуса и заштриховываем ее согласно решению второго, далее строим окружность для третьего неравенства и базовую окружность. Из центра системы через концы дуг проводим лучи так, чтобы они пересекали все окружности. На базовой окружности формируем решение (рис.56).

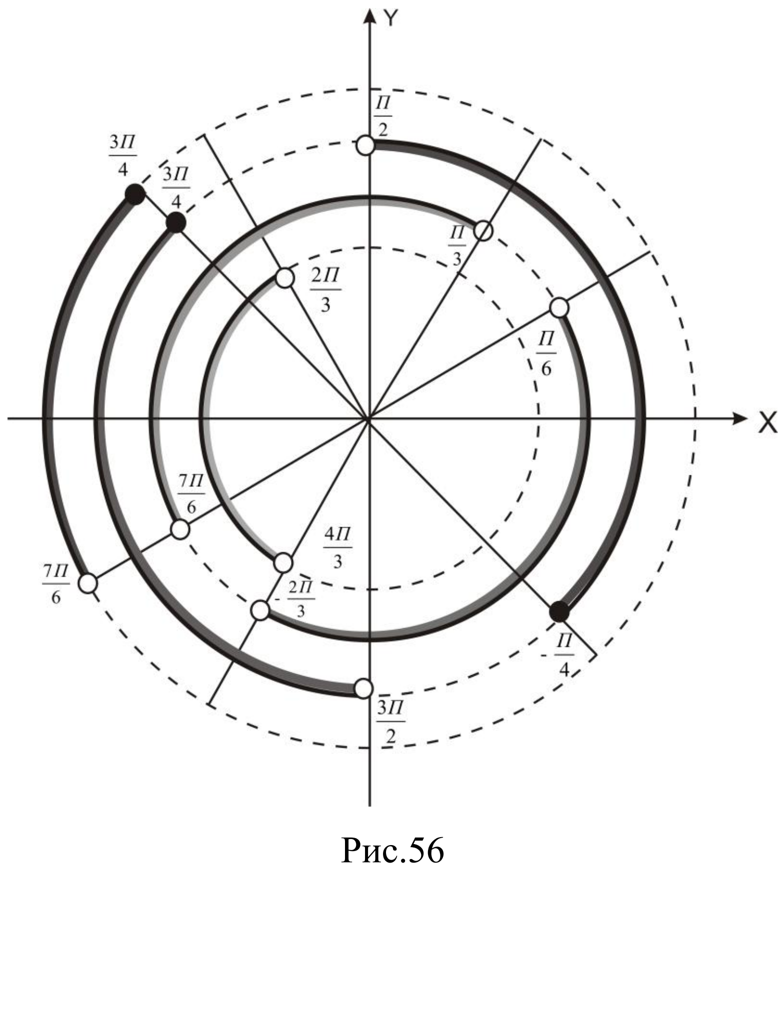


Рис.56

Ответ: $\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in Z$.

Пример 2. Решим систему неравенств $\begin{cases}\sin x<\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos x>-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$.

Решение: Найдем геометрическое решение неравенства $\sin x<\frac{\sqrt{3}}{2}$ (дуга MP окружности выделена на рис.57 серым цветом). На той же окружности найдем геометрическое решение неравенства $\cos x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (соответствующая дуга EK на рис.57 выделена черным цветом). Тогда геометрическим решением данной системы будет пересечение дуг MP и EK, то есть объединение дуг MK и EP. Осталось лишь составить аналитическую запись каждой из этих дуг. Для дуги MK имеем: $\frac{2\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi k$; для дуги EP имеем: $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k<x<\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

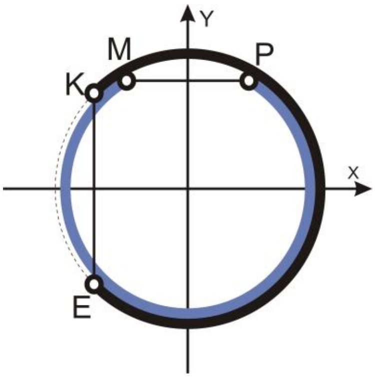


Рис.57

Пример 3. Решить неравенство $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos 2x>0$.

Решение: Применив формулу $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$, преобразуем неравенство к виду $1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos 2x>0$, и далее:

$$-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos 2x>-1,\ \sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x>-1,$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x>-\frac{1}{2},\ \sin\frac{\pi}{6}\sin 2x+\cos\frac{\pi}{6}\cos 2x>-\frac{1}{2},\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)>-\frac{1}{2}.$$

Решим полученное неравенство. Положив $t=2x-\frac{\pi}{6}$, получим неравенство $\cos t>-\frac{1}{2}$, решение которого находим с помощью окружности (рис.58): $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k<t<\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. Возвращаясь к переменной x, получаем: $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k<2x-\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, откуда $-\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{5\pi}{12}+\pi k$, $k\in Z$ – решение неравенства.

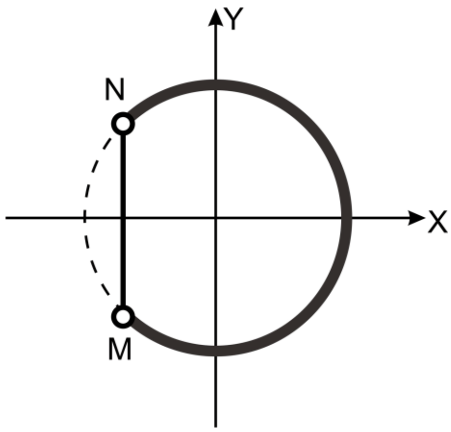


Рис.58

Задачи для аудиторной работы:

Решить неравенство или систему неравенств:

1. $6\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x>2$

2. $\sin x+\cos x<\frac{1}{\sin x}$

3. $\sin 2x\leq\cos x$

4. $\begin{cases} \cos x < -\dfrac{1}{2}, \\ \sin 2x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ tgx \geq 2-1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \cos \dfrac{1}{2} x \geq \dfrac{1}{2}, \\ \sin 2x < 0, \\ tgx \leq 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \cos\left(2t-18^0\right) tg50^0 + \sin\left(2t-18^0\right) \leq \dfrac{1}{2\cos 130^0}; \\ \cos\left(3t-30^0\right) - \sin\left(3t-30^0\right) tg30^0 > \dfrac{1}{2\cos 210^0}. \end{cases}$

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание для всех вариантов: решить неравенство, либо систему неравенств наиболее удобным методом.

Вариант №1.

1. $\sin 2x \sin 3x - \cos 2x \cos 3x > \sin 10x$

2. $3\cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x < \dfrac{1}{2}$

3. $\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1 \geq \dfrac{|\operatorname{ctg} x - 1| + 1}{\operatorname{tg} x}$

4. $3\sin x + \cos 2x \leq 2$

5. $\sin x + 2\cos x \geq 0$

6. Найти все решения уравнения $4\sin^4 x + \sin^2 2x = 2\operatorname{ctg}^2 x$, удовлетворяющие неравенству $\sin x \geq 2\cos x$.

7. $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 \geq 0$

Вариант №2.

1. $0{,}5^{\sqrt{3}} < 0{,}5^{\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}} < 0{,}5$

2. $2 + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x < 0$

3. $2\cos x\left(\cos x - \sqrt{8}\operatorname{tg} x\right) < 5$

4. $\begin{cases} 0{,}2^{\cos x} \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{2-x} + \dfrac{1}{2} > 0 \end{cases}$

5. $\left(3\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x - 2 - \sqrt{3}\right)\left(2\sin 2x - 1\right) \geq 0$

6. $7\cos x + 12\sin^2 x - 13 < 0$

7. $\cos^2 x + \sin x \cos x < 1$

Вариант №3.

1. $1-\cos x<\operatorname{tg} x-\sin x$

2. $\sqrt{3+2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x}>\frac{1+3\operatorname{tg} x}{2}$

3. $\begin{cases}0<x<2\pi\\ \sin 5x+\sin x>0\end{cases}$

4. $f(x)=\frac{\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin 2x}>0$

5. $\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(\operatorname{tg} x)}>\frac{1}{2}$

6. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x-2\operatorname{tg} 2x-4\operatorname{tg} 4x>8\sqrt{3}$

7. $\cos 2x-\sin 2x>0$

Вариант №4.

1. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x+2\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>0$

2. $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}\geq 3\operatorname{tg} x$

3. $\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}\leq\frac{1}{2}$

4. $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}>-\frac{1}{4}$

5. $\log_{\sin x}\operatorname{tg} x<2\log_{\operatorname{tg} x}\sin x+1$

6. $|\sin x+\cos x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$

7. $\cos\frac{x}{2}>\frac{1}{2}$

Вариант №5.

1. $\sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $4\sin 2x\cos 2x \geq \sqrt{2}$

3. $\log_{0,75}\sin x \geq \log_{\frac{9}{16}} 0,75$

4. $|\sin x| + |\cos x| \geq 1$

5. $\sqrt{3}\cos^{-2} x < 4\operatorname{tg} x$

6. $2\cos x\left(\cos x - \sqrt{8}\operatorname{tg} x\right) < 5$

7. $\cos 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Вариант №6.

1. $2\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 9\cos^2 x > 0$

2. $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$

3. $3\cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x < \frac{1}{2}$

4. $8\sin^4 x - 8\sin^2 x + \sin x - 1 < 0$

5. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x > 8\sqrt{3}$

6. $\sin^3 x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \cos^3 x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) > \frac{3\sqrt{3}}{8}$

7. $\cos^2 2x - 2\cos 2x \geq 0$

Вариант №7.

1. $\sin x - 3\cos x < 0$

2. $|\sin x + \cos x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

3. $|\sin x|\cos x > \frac{1}{4}$

4. $3^{\operatorname{tg} x} > 3^{\cos x}$

5. $2<2\left(\dfrac{\sin x}{1-\cos x}\right)^2<8$

6. $|\sin x|+|\cos x|\geq 1$

7. $4\sin^2 x-8\sin x+3\geq 0$

Вариант №8.

1. $\log_{0,75}\sin x\geq \log_{\frac{9}{16}} 0,75$

2. $\sqrt{\cos x-\sin x}\geq \sin x-\dfrac{1}{2}$

3. $\log_{\sin x}\operatorname{tg} x<2\log_{\operatorname{tg} x}\sin x+1$

4. $\log_{\frac{\cos x}{\sqrt{2}}}\left(\dfrac{\cos^2 2x-\sin^2 x}{2}\right)\leq 2$

5. $\dfrac{\lg 2+\lg\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\lg(\sin x+\cos x)}>-1$

6. $\sin x-\cos x>1$

7. $2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-5\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2>0$

Вариант №9.

1. $\sin x+\cos x<0$

2. $|\sin x|\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\log_{\frac{1}{2}}\sin x>1$

4. $\operatorname{tg} 2x-2\operatorname{tg} x<0$

5. $2\cos^2 x+3\sin x-3\geq 0$

6. Докажите неравенство: $\cos x<1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$, если $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

7. $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>\frac{1}{4}$

Вариант №10.

1. $5-2\cos^2 x<3\left|2\sin x-1\right|$

2. $\log_{\sin x}\left(\sin x-\frac{1}{4}\cos x\right)<3$

3. $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\leq\sqrt{2}$

4. $\cos^2 x\geq\frac{1}{4}$

5. $\dfrac{2\sin x+1}{2\cos\frac{x}{2}-1}\geq 0$

6. Докажите неравенство: $\sin x>x-\frac{x^3}{6}$, если $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

7. $\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$

Вариант №11.

1. $\sin 2x<\cos x$

2. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x\geq 0$

3. $6\sin^2 x-5\sin x+1>0$

4. $\dfrac{2\cos^2 x+\cos x-1}{\sin x-1}<0$

5. $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}\leq 0$

6. Докажите неравенство: $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$, если $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

7. $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x>-1$

Вариант №12.

1. $2\sin^2 x + 9\cos x - 6 \ge 0$

2. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} \ge 0$

3. $4\sin x\cos x - \sqrt{2} < 2\left(\sqrt{2}\cos x - \sin x\right)$

4. $\cos 2x + \sin x \ge 0$

5. $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \ge 2$

6. Докажите неравенство: $\cos A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2}$, если A, B и С – углы треугольника

7. $\sin 4x \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Вариант №13.

1. $\dfrac{\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} > 2$

2. $\left(3\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x - 2 - \sqrt{3}\right)\left(2\sin 2x - 1\right) \ge 0$

3. $\sqrt{3}tg^2 x - 4tgx + \sqrt{3} > 0$

4. $\dfrac{15}{\sin x + 1} < 11 - 2\sin x$

5. $\dfrac{2}{tgx + 1} < 2 - tgx$

6. Найти все решения неравенства $x^2 + 2x + \cos 5 < 0$, лежащие в промежутке $-2 \le x \le -\dfrac{1}{3}$

7. $\sin 2x \ge -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Вариант №14.

1. $tgx + ctgx \geq \sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2. $\cos 2x \leq \cos 3x - \cos 4x$

3. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x \geq 2$

4. $\sin 2x + 2\sin x > 0$

5. $(1 + \cos 2x)(tgx - \sqrt{3}) > 0$

6. Докажите справедливость неравенства: $\sqrt{\cos\varphi} < \sqrt{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}$, если $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$

7. $\left(\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}\right)^2 < \sin x$

Вариант №15.

1. $\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\cos \pi x\right) \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\sqrt{5 - 2\sin x} \geq 6\sin x - 1$

3. $2 + \sin x > \dfrac{1}{1 + x^2}$

4. $2 - \cos x > \dfrac{1}{1 + x^2}$

5. $\arccos(3x) + \arcsin(x + 1) \leq \dfrac{7\pi}{6}$

6. Докажите справедливость неравенства: $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha \geq \dfrac{1}{2}$ при любом α

7. $\sin^2\dfrac{x}{2} < \dfrac{1}{4}$

Вариант №16.

1. $\sqrt{3}\cos^{-2}x < 4\operatorname{tg} x$

2. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) < -\sqrt{3}$

3. $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 > 0$

4. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \le 2$

5. $4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x > 1$

6. Докажите неравенство: $\cos\sin x > \sin\cos x$, если $0 < x < \frac{\pi}{2}$

7. $\sin\frac{x}{2} \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. и др. Алгебра и начала анализа. Учеб. для учащихся 10-11 кл. сред. шк. / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин и др. – М.: Просвещение, 1994.

2. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства / М.И. Башмаков – М.: Наука, 1976.

3. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства / Э. Беккенбах, Р. Беллман – М.: Мир, 1965.

4. Блох А.Ш., Трухан Т.Л. Неравенства / А.Ш. Блох, Т.Л. Трухан – Минск: Народная Асвета, 1972.

5. Ваховский Е.Б., Рывкин А.А. Задачи по элементарной математике / Е.Б. Ваховский Е.Б., А.А. Рывкин – М.: Наука, 1971.

6. Виленкин Н.Я., Гутер Р.С., Шварцбурд С.И., Овчинский Б.В., Ашкинузе В.Г. Алгебра. Учебное пособие для 9-10 классов средних школ с математической специализацией. / Н.Я. Виленкин, Р.С. Гутер, С.И. Шварцбурд и др. – М.: Просвещение, 1968.

7. Водинчар М.И., Лайкова Г.А., Гусева О.В. Метод концентрических окружностей для систем тригонометрических неравенств // Математика в школе. – 1999. – №4. – С.73-74.

8. Ефремов А.В. Алгебра и начала анализа. – Казань: Татарское книжное изд-во, 1991.

9. Игольникова С.Е., Зарипов Р.Ю., Зарипова И.Р. Решение тригонометрических уравнений и неравенств повышенной сложности: Метод. пособие КГТУ. – Казань, 2000.

10. Киселев А.П. Алгебра: Учебник 8-10 кл. средней школы. / А.П. Киселев – М.: Просвещение, 1957.

11. Колмогоров А.Н., Абрамов А.Н. и др. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10—11 кл. сред, шк. / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.; Под ред. А. Н. Колмогорова. — М.: Просвещение, 1990.

12. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В.С. Крамор – М.: Просвещение, 1990.

13. Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике. Тригонометрия. / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович – М.: Вербум-М, 2000.

14. Мазур К.И. Тригонометрические уравнения и неравенства / К.И. Мазур – Киев: Украинская энциклопедия, 1994.

15. Макарычев Ю.Н. и др. Тригонометрические неравенства и их преобразование / Под ред. С.А.Теляковского. – М.: Просвещение, 1985.

16. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А. Г. Мордкович. — 10-е изд., стер. — М.: 2009.

17. Назаренко А.М., Назаренко Л.Д. Тригонометрические уравнения и неравенства / А.М. Назаренко, Л.Д. Назаренко – Сумы: Изд-во Слобожаницина, 1994.

18. Полный сборник решений задач для поступающих в вузы / Под ред. М.И.Сканави. – М.: Альянс-В; Минск: ООО "Харвест", 1999.

19. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах / И.Х. Сивашинский – М.: Просвещение, 1967.

20. Теляковский С.А. Алгебра: Учебник для 8 класса средней школы / Под общ. ред. С.А. Теляковского – М.: Просвещение, 1987.

21. Фенько Л.М. Метод интервалов в решении неравенств и исследовании функций. 8-11 кл.: учебное пособие / Л.М. Фенько. – М.: Дрофа, 2005. – 124 с.

22. Ястребинецкий Г.А. Уравнения и неравенства с параметрами. / Г.А. Ястребинецкий – М., 1972.

СОДЕРЖАНИЕ